El 'principio de Dirichlet' de Bernhard Riemann

por Bruce Director

En su ensayo revolucionario de 1857, ***Teoría de las funciones abelianas,*** Bernhard Riemann reveló el significado epistemológico más sesudo del dominio complejo, mediante una nueva aplicación osada de una principio de acción física que él llamó el "principio de Dirichlet".

El enfoque de Riemann, en combinación con lo que estableció en su disertación de habilitación de 1854, no sólo auguró una revolución en el pensamiento científico: encendió una contrarreacción tan feroz como la que la escuela empirista —que estaba bajo el control británico–veneciano— de Galileo Galilei, Isaac Newton, Leonhard Euler y Joseph Louis de Lagrange emprendió, por las mismas razones, contra Nicolás de Cusa, Johannes Kepler, Pierre de Fermat y Godofredo Leibniz, una contrarreacción que sigue ardiendo hasta nuestros días, con implicaciones que rebasan por mucho el marco específico del documento de Riemann de 1857. A pesar de los tomos que se han escrito sobre este tema desde la época de Riemann hasta la nuestra, un examen honesto de la historia del asunto revela que, tal como Carl Friedrich Gauss demostró el fraude de Euler, Lagrange y Jean Le Rond d'Alembert en su prueba de 1799 del teorema fundamental del álgebra, Riemann tuvo razón, y sus críticos, como los actuales controladores straussianos de George Bush y Dick Cheney, fueron fraudes malévolos.

No podemos saber a ciencia cierta si Riemann, cuando decidió designar a este método como una aplicación del "principio de Dirichlet", esperaba provocar la reacción que obtuvo, o si sólo estaba afirmando lo que habría sido obvio para cualquiera dentro de la amplia red de los estudiantes de Abraham Kästner. En cualquier caso, es una fortuna para nosotros que usara ese nombre, pues nos permite reconstruir con bastante exactitud, no sólo los orígenes científicos del pensamiento de Riemann, sino el proceso histórico–político del cual surgió.

Lejeune Dirichlet

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet fue una figura central en la ciencia de principios del siglo 19. Nacido en 1805 en una familia de origen belga que vivía cerca de Aachen, empezó su educación en Bonn. A la edad de 16, con una copia de las ***Disquisitiones arithmeticae*** de Gauss bajo el brazo, fue a París a escuchar clases en el College de France y en la Faculté des Sciences. Un año después, el general Maximilien Sebastien Foy, un miembro republicano de la Cámara de Diputados que fue quien le presentó a Alejandro de Humboldt, lo empleó como profesor particular. A la muerte de Foy en 1825, De Humboldt reclutó a Dirichlet para que regresara a Alemania, arregló que obtuviera un grado académico (aunque Dirichlet se rehusaba a hablar latín), y a la larga le consiguió una cátedra en la Universidad de Berlín. Allí, además de conocer y desposar a la nieta de Moisés Mendelssohn, Rebecca (hermana del compositor Félix Mendelssohn), Dirichlet cultivó una fructífera colaboración con Karl Jacobi y Jacob Steiner, que lo llevaron a visitar Italia con ambos en 1843, bajo el patrocinio de Alejandro de Humboldt.

En 1847 Riemann llegó a Berlín a estudiar con Dirichlet, Jacobi y Steiner, luego de pasar los dos años anteriores estudiando con Gauss. En 1849 regresó a Gotinga para completar sus estudios, y en 1851, bajo la dirección de Gauss, publicó su disertación doctoral, "Los fundamentos de una teoría general de las funciones de una magnitud variable compleja", en el que, por primera vez, aplicó su principio, pero sin mencionar a Dirichlet. A la muerte de Gauss en 1855, Dirichlet fue nombrado su sucesor, teniendo así contacto de nuevo con Riemann, quien había recibido autorización para enseñar sólo siete meses antes, luego de presentar su disertación de habilitación, "Sobre las hipótesis que subyacen a los fundamentos de la geometría".

Bernhard Riemann. (Foto: Library of Congress).

En 1857 Riemann publicó la ***Teoría de las funciones abelianas,*** donde por primera vez identificó el principio en el que basaba sus nuevas teorías como el "principio de Dirichlet".

Dirichlet murió dos años después, y Riemann, que entonces tenía 33 años, tomó su lugar, posición que ocupó hasta su muerte prematura sólo siete años después.

El potencial

Lo que Riemann llamó el "principio de Dirichlet", nació de la aplicación de Gauss del dominio complejo a sus investigaciones de geodesia y magnetismo terrestre, las primeras organizadas en colaboración con Heinrich Schumacher desde 1818, y las segundas a iniciativa de Alejandro de Humboldt en 1832. Ambos proyectos rindieron enormes beneficios prácticos. Cada uno produjo mapas detallados de sus efectos físicos respectivos, que fueron vitales para el desarrollo de la infraestructura, y Humboldt organizó con su proyecto, por primera vez, una red internacional de colaboración científica que tendría un impacto en el desarrollo de la economía física, desde las Américas hasta Eurasia, por generaciones.

Pero Gauss reconoció que ambos proyectos planteaban interrogantes epistemológicas más hondas para la ciencia. En su ***Teoría general del magnetismo terrestre*** de 1839, Gauss dijo que dibujar un mapa completo y preciso de las observaciones no era, en sí mismo, una objetivo adecuado para la ciencia, pues "uno no tiene sino la primera piedra, no el edificio, en tanto no haya subyugado las apariencias a un principio subyacente". Citando el caso de la astronomía como ejemplo, Gauss dijo que el registro de las observaciones del movimiento aparente de los cuerpos celestes sobre la esfera celeste no era más que el comienzo: sólo una vez que se descubrió el principio subyacente de la gravitación, fue que pudieron determinarse las órbitas reales de los planetas.

Gauss reconoció que el primer paso, tanto en la geodesia como en el geomagnetismo, era medir los cambios en los efectos que ambos fenómenos producían sobre los instrumentos de medición. En el caso de la geodesia, esto implicaba cambios en la dirección de una plomada o nivel plano, conforme dichos cambios quedaban registrados sobre la esfera celeste. El caso del geomagnetismo es más complicado. Aquí, los cambios en la dirección de la aguja de un compás se medían con respecto a tres direcciones y el tiempo. La pregunta general era: ¿cuál es la naturaleza característica del principio de gravitación o geomagnetismo que produciría estos efectos aparentes? La tarea específica era: ¿cómo puede determinarse esa característica general a partir de estos cambios infinitamente pequeños medidos en los efectos aparentes?

Es esta segunda pregunta la que nos pone en contacto de forma más directa con lo que Riemann llamó el "principio de Dirichlet". Sin embargo, la empresa de entender el "principio de Dirichlet" será mucho más fácil si primero observamos el caso elemental, pero congruente, de la catenaria.

El foco pertinente de esta discusión es la devastadora refutación que Leibniz y Jean Bernoulli hicieron de Galileo y Newton en el caso de la catenaria. Galileo insistía que todo lo que necesitaba o podía saberse sobre la catenaria, era una descripción de su forma visible. Por su parte, Leibniz y Bernoulli insistieron

Lejeune Dirichlet.

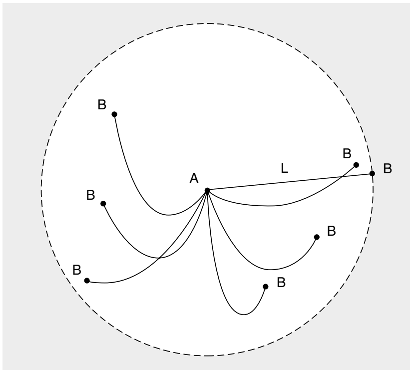
que la forma de la catenaria no era más que el mero efecto visible de un principio físico subyacente, y que su forma correcta no podía determinarse hasta conocer dicho principio subyacente. Como lo hemos desarrollado en ejercicios pedagógicos previos,[1] Leibniz y Bernoulli determinaron la naturaleza característica de ese principio, estableciendo primero su efecto físico cambiante en lo infinitesimalmente pequeño y, entonces, por inversión, la característica general del principio. El resultado fue el descubrimiento de Leibniz de que la forma de la cadena suspendida reflejaba el efecto de acción mínima del principio de la gravitación universal, y que este efecto podía expresarse en términos geométricos como la media aritmética entre dos funciones exponenciales contrapuestas.[2]

Es de suma importancia hacer hincapié aquí, en que estamos hablando de

1. Ver, por ejemplo, "La larga vida de la Catenaria, de Brunelleschi a LaRouche" de Bruce Director (*Resumen ejecutivo* de la 1ª quincena de julio de 2004).

2. Ver "Two Papers on the Catenary Curve and Logarithmic Curve" (Dos trabajos sobre la curva catenaria y la curva logarítmica), del ***Acta eruditorum*** de G.W. Leibniz de 1691, en una traducción al inglés de Pierre Beaudry para la edición de primavera de 2001 de la revista ***Fidelio*** (vol. X, núm. 1).

FIGURA 1



El cambio de posición del punto de sujeción B genera varias catenarias.

la cadena suspendida física y no de una expresión matemática formal. En una expresión matemática formal, las curvas exponenciales no tienen límite. Pero la cadena suspendida física sí —la posición de los puntos de sujeción—; por consiguiente, la forma específica de la cadena la determina la posición de los puntos de sujeción con relación al peso y la longitud de la cadena. Si la posición de los puntos de sujeción cambia, la posición de cada eslabón de la cadena también cambia, aunque siempre de conformidad con la antedicha relación. En otras palabras, conforme cambian las condiciones límite de la cadena física, también lo hace la trayectoria específica de la cadena, *pero la forma general de dicha trayectoria, que es un requisito del principio de acción mínima, siempre es una catenaria.* Nunca se convertirá en una parábola o en ninguna otra curva (ver **figura 1**).

Este ejemplo ilustra un aspecto del método que Leibniz originalmente llamó *"análisis situs"* —o que Gauss y Carnot llamaron después "geometría de posición"—, que es pertinente para entender el "principio de Dirichlet" de Riemann. La posición de los eslabones individuales de la cadena es una función de la relación entre la condición límite (la posición de los puntos de sujeción con relación al largo de la cadena) y la curvatura característica del principio de gravitación, y no de las relaciones uno a

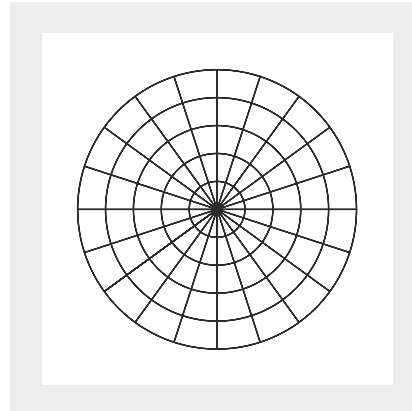
FIGURA 2

Una película de jabón suspendida entre un par de aros forma una catenoide. (Foto: Stuart Lewis/EIRNS).

uno entre los eslabones mismos. En otras palabras, la posición de cualquier eslabón individual no está determinado por su distancia hacia la izquierda o la derecha, o hacia arriba o abajo, de sus vecinos, como los cartesianos y newtonianos insistirían. Más bien, la posición de cada eslabón es una función de la característica de cambio de la acción física de conjunto. Cualquier cambio en las condiciones límite altera la posición de cada eslabón, *como un todo,* de conformidad con el principio de acción mínima de la catenaria. Así, el efecto del principio físico invisible en el dominio de lo visible, cobra expresión a través de la característica de cambio que exige el principio de acción mínima. Esto es lo que determina la posición específica de los eslabones. En otras palabras, la *posición* es una función del *cambio.*

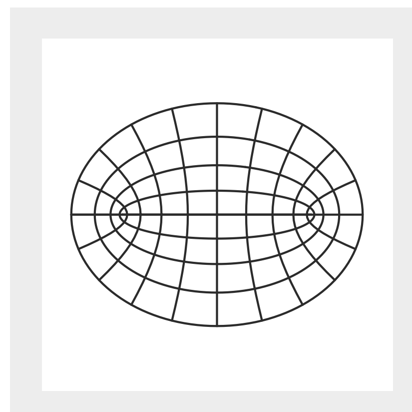
Gauss reconoció que los principios subyacentes de la geodesia y el geomagnetismo podía entenderse mediante una extensión del método de Leibniz. Él rechazó el método popular aceptado, pero

FIGURA 3



Conjunto armónico de círculos y líneas radiales.

FIGURA 4

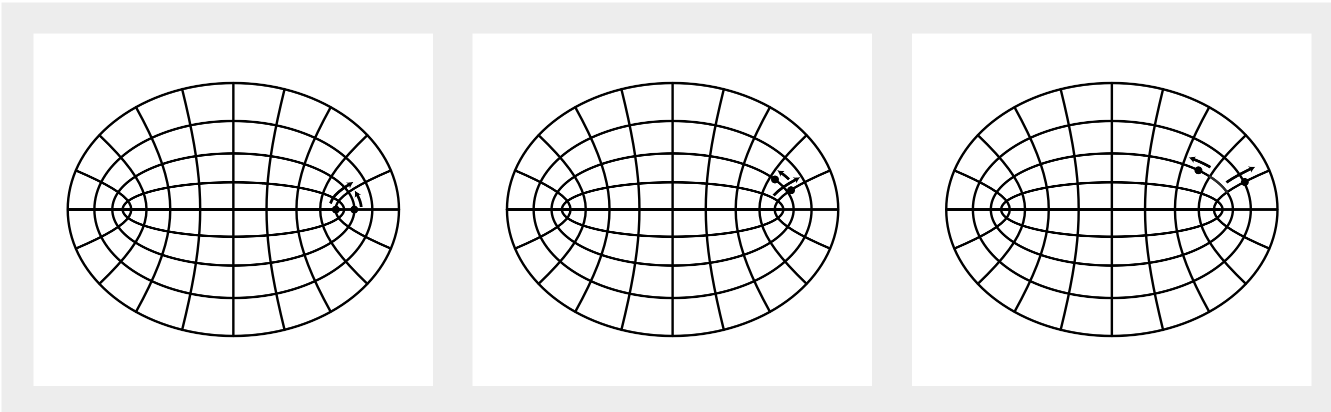


Conjunto armónico de elipses e hipérbolas.

probadamente falso, de Newton, que pretendía explicar estos fenómenos como el resultado de una interacción de uno a uno entre cuerpos materiales, según la formula algebraica del inverso del cuadrado.[3] En cambio, Gauss insistía que estos fenómenos, como en el caso de la catenaria, habían de entenderse como un proceso unificado, en la cual las variaciones locales de la posición de la plomada o la aguja del compás fueran

3. Ver el número 53 de la serie ***Riemann for Anti–Dummies*** (Riemann a prueba de tontos) de Bruce Director, "Look to the Potential" (Vean al Potencial), del 21 de diciembre de 2003 (aún inédito).

FIGURA 5



El ritmo de cambio de la curvatura de las elipses y las hipérbolas correspondientes siempre es igual.

una función de la característica del principio que gobernaba al fenómeno como un todo. A ese todo Gauss lo llamó "el potencial", que es el equivalente en latín del *"dúnamis"* griego o del *"Kraft"* de Leibniz (o del latín *"vis viva"*). Gauss inventó la idea de una "función de potencial" para expresar el efecto de acción mínima del principio físico sobre un área o un volumen, de un modo parecido, pero más amplio, a como Leibniz expresó el efecto de la gravedad para generar la curvatura de la cadena suspendida. Para lograr esto, Gauss amplió la idea de Leibniz de una función al dominio complejo.

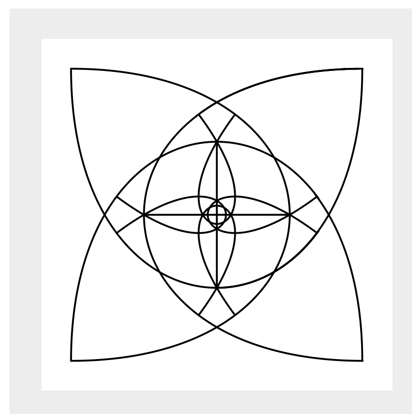
Esto transformó las funciones de Leibniz —que caracterizaban una sola trayectoria mínima— en la "función de potencial" de Gauss, la cual caracterizaba toda una clase de trayectorias mínimas; en efecto, una función de funciones. En otras palabras, si entendemos la catenaria de Leibniz como una trayectoria mínima determinada por un conjunto de dos funciones, la función de potencial de Gauss da el siguiente paso, hacia una función que unifica dos (o más) *conjuntos* de funciones. Riemann demostraría más tarde que estos conjuntos de trayectorias mínimas definen de forma implícita superficies mínimas, como por ejemplo la catenoide que forma una película de jabón suspendida entre dos aros circulares (ver **figura 2**).

Estos conjuntos de funciones no son arbitrarios. Están relacionados mediante una suerte de vínculo especial, que cobra los nombres descriptivos de funciones "esféricas" o "armónicas". Una función esférica o armónica es un conjunto de funciones ortogonales cuyas curvaturas cambian al mismo ritmo.

La forma más sencilla de ilustrar esto de manera pedagógica, es con algunos ejemplos geométricos. Un conjunto de círculos concéntricos y líneas radiales componen una función armónica, porque tanto los círculos como las líneas radiales intersecan de forma ortogonal, y ambos tienen una curvatura constante (ver **figura 3**). Un ejemplo más ilustrativo es un conjunto de elipses e hipérbolas ortogonales (ver **figura 4**). Para captar de forma intuitiva sus relaciones armónicas, piensa en lo siguiente. Cada elipse está asociada con una hipérbola ortogonal con la que comparte el mismo foco. Empezando en el punto donde ambas curvas tocan el eje, crea en tu mente una acción conexa que camina de forma simultánea sobre las dos curvas (ver **figura 5**). Nota que, conforme la curvatura de la hipérbola se hace menos curva, lo mismo ocurre con la de la elipse correspondiente, y al mismo ritmo.

Así, las funciones armónicas relacionan dos conjuntos de curvas diferentes, tales que el ritmo de cambio de sus respectivas curvaturas siempre es igual

FIGURA 6



Conjunto armónico de curvas cúbicas.

(podemos calcular esta relación con precisión usando el cálculo de Leibniz, pero una comprensión intuitiva basta para los propósitos presentes).

Es más, no es necesario que un conjunto de funciones armónicas lo conformen curvas conocidas, tales como círculos, líneas, elipses o hipérbolas. De hecho, conjuntos de funciones bastante complicados pueden ser armónicos (ver **figura 6**).

En contraste, un conjunto de círculos e hipérbolas no es armónico, porque la curvatura del circulo es constante, en tanto que la de la hipérbola es cambiante. En consecuencia, los dos conjuntos de estas curvas no son ortogonales (ver **figura 7**).

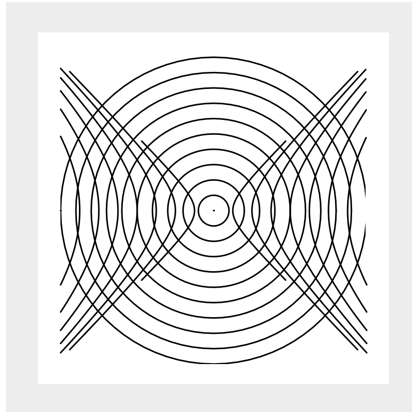
Gauss reconoció que el principio de acción mínima de Leibniz con respecto a las superficies y los volúmenes encontrados en fenómenos tales como la gravitación y el magnetismo terrestres, podían expresarse con funciones armónicas. Un conjunto de curvas de la función armónica expresaba las trayectorias de cambio mínimo en el potencial de acción, en tanto que las otras curvas ortogonales expresaban las trayectorias de cambio máximo en el potencial de acción. Por ejemplo, si la Tierra fuera perfectamente esférica, sus potenciales de acción mínima y máxima podrían expresarse mediante una serie de capas esféricas concéntricas y de planos ortogonales. Un corte transversal de semejante configuración mostraría círculos y líneas radiales armónicamente relacionadas. Si la Tierra tuviera una forma elipsoidal perfecta, su potencial lo expresaría un conjunto de elipsoides e hiperboloides triplemente ortogonales, cuya sección transversal mostraría el conjunto armónicamente relacionado de elipses e hipérbolas que ilustra la **figura 4**.

Pero, como puso de relieve Gauss, la forma de la Tierra es mucho más complicada que una esfera o una elipsoide, con respecto tanto a la gravedad como al magnetismo, y las trayectorias de los potenciales de acción máxima y mínima no son tales curvas tan simples y bien conocidas como los círculos, las líneas, las elipses o las hipérbolas. Así, ha de encontrarse una función armónica más compleja para expresar estos principios. Semejante función no puede determinarse *a priori,* sino sólo a partir de los cambios medidos en el efecto de la gravedad o el magnetismo de la Tierra.

La cuestión para Gauss era: ¿cómo determinar la verdadera forma física de la Tierra, o la característica del magnetismo de la Tierra, a partir de los cambios infinitesimalmente pequeños en su potencial observados en sus mediciones magnéticas y geodésicas?

Esto empieza a acercarnos a una primera aproximación de lo que Riemann llamó el "principio de Dirichlet".

FIGURA 7



Un conjunto de círculos e hipérbolas no es armónico.

Hacer una determinación precisa de la superficie de la Tierra o del efecto magnético, como hizo Gauss, es bastante complicado, pero el principio en el que estaba basado su método está al alcance de esta pedagogía. Si uno reconoce, como lo hizo Gauss, que los cambios de dirección de la plomada miden cambios en dirección de la función de potencial, entonces la forma física de la Tierra tiene la misma relación con este potencial que la que tienen los puntos de sujeción con la catenaria. En otras palabras, la superficie de la Tierra ha de entenderse como el mero límite del potencial o, como dijo Gauss, "la superficie física de la Tierra es, en un sentido geométrico, la superficie que en todas sus partes es perpendicular a la atracción de la gravedad".

Una referencia al antiguo problema pitagórico de doblar la línea, el cuadrado o el cubo puede arrojar cierta luz sobre esta idea. A la línea la acotan puntos, al cuadrado líneas, y al cubo cuadrados. El tamaño y la posición de estas acotaciones los determina la longitud, el área y el volumen que encierran. Por ejemplo, ¿es el cuadrado el que determina el tamaño y la posición de sus lados, aunque son estos últimos los que ves y no al primero? Los lados del cuadrado son líneas, pero los produce un poder (potencial) diferente que el de las líneas generadas por otras líneas. De modo parecido, el tamaño y la posición de los cuadrados que acotan a un cubo los produce un poder (potencial) diferente que el de los cuadrados generados por la diagonal de otro cuadrado. Así, aunque el poder no pueda verse, puede medirse gracias a su efecto característico único sobre los límites de su acción.

Apliquemos ahora el mismo método de pensamiento a los principios físicos antes discutidos. La catenaria es una curva acotada por puntos. Una catenoide es una superficie cuyos límites son curvas. La superficie de la Tierra representa el límite de un volumen gravitatorio. El efecto magnético de la Tierra es aun más complicado, y lo abordaremos a mayor detalle en un ejercicio pedagógico futuro.

Esta relación conexa entre las condiciones límite de un proceso físico, y la expresión del principio de acción mínima con respecto a dicho proceso, es la relación que Riemann refiere cuando habla del "principio de Dirichlet".

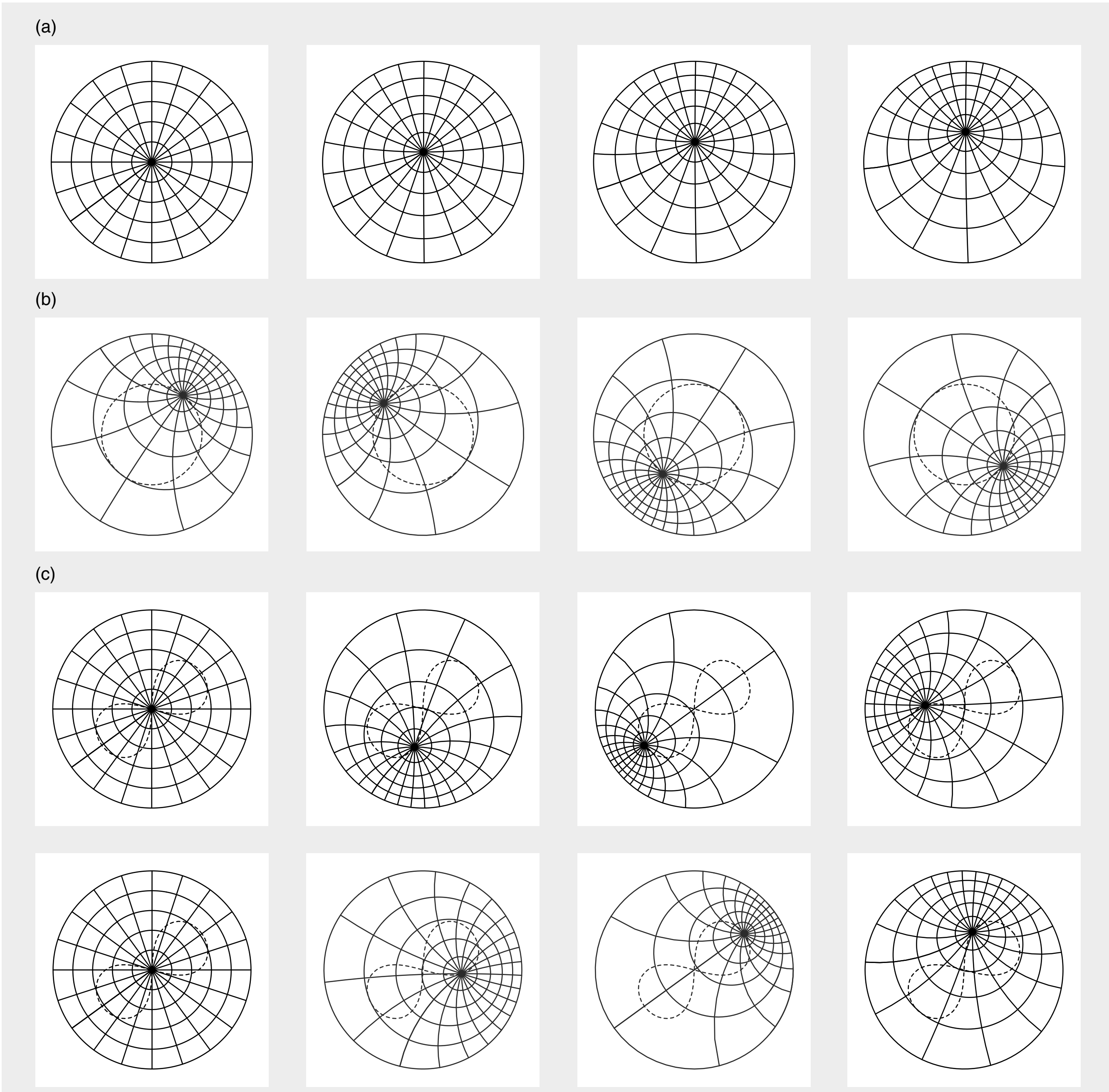
De Gauss a Dirichlet, a Riemann

Tras tomar el puesto de Gauss en 1855, Dirichlet comenzó a dar cátedra sobre la teoría del potencial de Gauss en Gotinga, en tanto que Riemann estaba preparando su ***Teoría de las funciones abelianas.*** Lo que Gauss, Dirichlet y Riemann reconocieron era que tales funciones complejas, como la extensión del concepto de Leibniz de la catenaria y los logaritmos naturales, tenían una idoneidad única para expresar las trayectorias de acción mínima de las funciones de potencial.

Gauss ya había demostrado esto en su prueba de 1799 del teorema fundamental del álgebra, donde demostró que una expresión algebraica compleja genera dos superficies cuyas curvaturas están armónicamente relacionadas. Lo que Riemann le atribuyó a Dirichlet fue el principio de que, dada una cierta condición límite, la función que minimiza la acción dentro de la misma es una función armónica compleja.

Pongan en juego esta idea en el territorio conocido de la catenaria. Las condiciones límite aquí son las posiciones de los puntos de sujeción. El "interior"

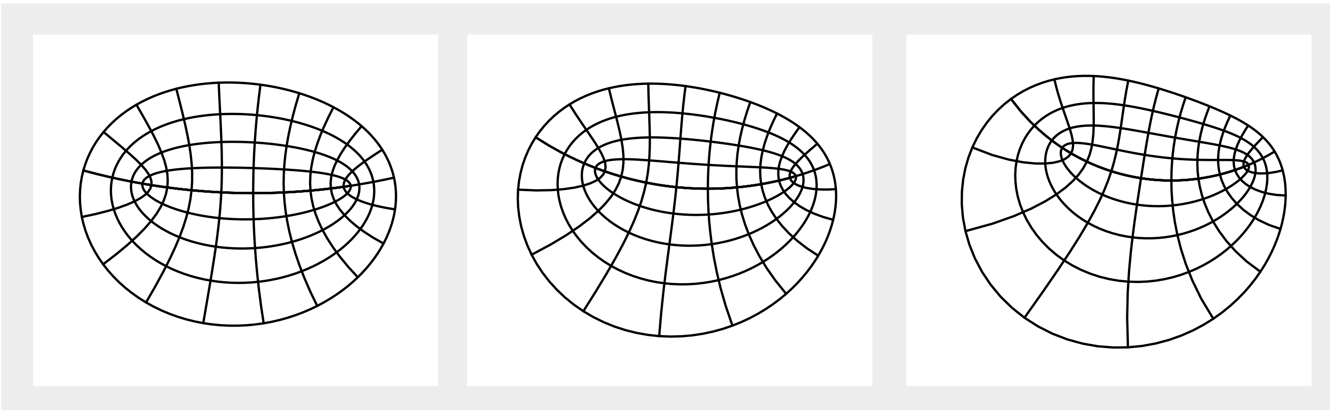
FIGURA 8



Transformación de un conjunto armónico de círculos y líneas radiales. (a) El punto de intersección de las líneas radiales corre en una línea recta ascendente. (b) El punto de intersección de las líneas radiales se mueve en un círculo. (c) El punto de intersección de las líneas radiales sigue la trayectoria de una lemniscata.

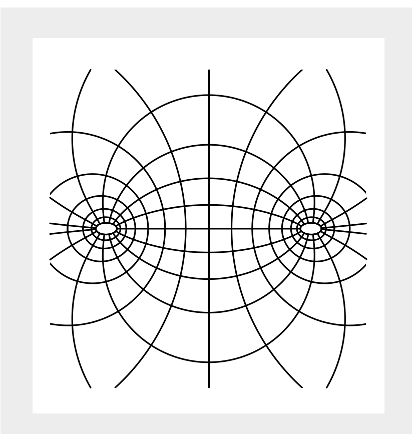
de dicho límite es la curva misma. Dentro de la curva hay un punto que es singular: el punto inferior. Si las condiciones límite cambian, al alterar las posiciones de los puntos de sujeción, así también lo hace la posición del punto inferior. Para exponer el principio de Dirichlet en este marco simplificado: la catenaria es la trayectoria de acción mínima de una cadena suspendida con esta singularidad y condiciones límite especificas. Si las condiciones límite cambian, la forma de la curva cambia de conformidad, de acuerdo con la preservación del principio de acción mínima.

FIGURA 9



Los puntos focales de elipses e hipérbolas con una relación armónica, siguen la trayectoria de un círculo.

FIGURA 10



Un conjunto de curvas armónicas doblemente periódicas típica de las funciones armónicas. Aquí, las curvas son armónicas con respecto a dos principios límite.

Riemann invirtió el principio de Dirichlet: *puesto que el principio de acción mínima es primordial, ¡la posición de los puntos de sujeción y del punto inferior determinan por completo la forma de la cadena!*

Ahora haz esta misma investigación respecto a la catenoide que forma una película de jabón que pende entre dos aros circulares. Esta catenoide es una superficie mínima, o de acción física mínima. Esta superficie comprende un conjunto ortogonal de curvas de acción mínima y máxima (Riemann luego demostró que tales curvas están relacionadas de forma armónica). Experimenta cambiando la forma de estos límites, de círculos a elipses, a formas aplanadas irregulares, a polígonos. Cuando alteras la posición o la forma de los límites de esta superficie, la forma de la superficie misma y de las curvas que contiene cambia de conformidad, pero el principio de acción mínima se preserva.

Ahora generaliza esta idea con algunos otros ejemplos pedagógicos ilustrados en las siguientes figuras derivadas de animaciones de computadora. En la **figura 8** vemos un conjunto de círculos y líneas radiales armónicamente relacionados que intersecan al centro de los círculos, transformándose al tiempo que conservan sus relaciones armónicas. Si la posición de ese punto de intersección cambia, las líneas radiales han de transformarse en arcos circulares, y sus extremos correrán a lo largo del límite a fin de conservar sus relaciones armónicas. Este efecto aparece conforme el punto de intersección se mueve, primero lejos del centro (ver **figura 8a**), luego en una trayectoria circular alrededor del centro (ver **figura 8b**), y después sobre la trayectoria de una lemniscata (ver **figura 8c**). Este movimiento hace que todas las posiciones dentro del límite cambien *de conjunto.* Lo que no cambia es la relación armónica, o sea, de acción mínima.

Esto también puede enseñarse de forma inversa: que los cambios de posición de la intersección de las líneas radiales en el límite hacen que su punto de intersección se mueva en un arco circular, y que su forma cambie de líneas a arcos circulares.

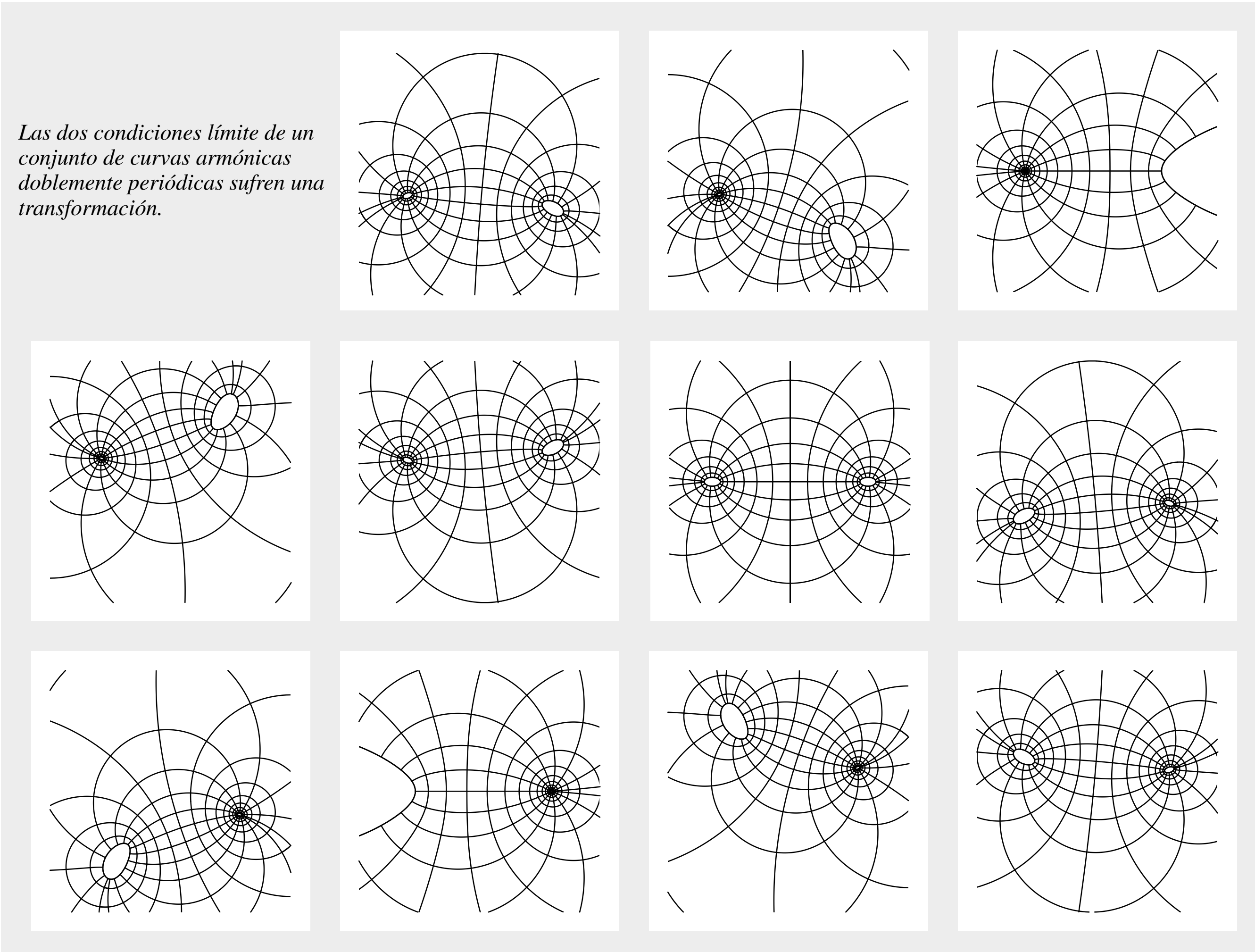
O, que los cambios infinitesimalmente pequeños en la curvatura de las trayectorias los determinan las condiciones del límite con respecto a la posición de la singularidad.

Compara esta acción con el cambio de posición del punto inferior de la catenaria conforme cambian las posiciones de los puntos de sujeción, del modo que lo ilustra la **figura 1.**

Ahí, un cambio de los puntos límite produce otro a lo largo de una sola curva. Aquí, un cambio de la curva límite genera otro en un conjunto de curvas armónicamente relacionadas dentro de una superficie.

Compara esto con el problema con el que Gauss topó, por ejemplo, al determinar la localización de los polos magnéticos de la Tierra a partir de los cambios infinitesimalmente pequeños en su efecto magnético. Gauss entendió que esos cambios pequeños estaban conectados con la posición de las singularidades, o sea, de los polos magnéticos, del efecto magnético de la Tierra. Sin embargo, en los tiempos de Gauss se desco-

FIGURA 11



Las dos condiciones límite de un conjunto de curvas armónicas doblemente periódicas sufren una transformación.

nocía la localización exacta de tales polos, o su número siquiera. Fue basándose en las mediciones que obtuvieron las redes de Humboldt, que Gauss determinó donde habían de localizarse dichos polos. El propósito de la famosa expedición estadounidense de Wilkes de 1837 era, en parte, confirmar los hallazgos de Gauss, cosa que logró.

La **figura 9** ilustra este mismo efecto al mover los puntos focales de las líneas radiales a lo largo de la trayectoria de un círculo. Nota de nuevo cómo este cambio de posición de la singularidad altera la condición en el límite, de modo que todas las relaciones resultantes siguen siendo armónicas.

La **figura 10** muestra el mismo proceso, pero la forma del límite ha cambiado a la de una elipse, lo cual a su vez transforma la forma de las curvas ortogonales en hipérbolas, y el punto de intersección en dos focos. Por supuesto, también puede decirse que las líneas radiales se transforman en hipérbolas, lo cual convierte los círculos en elipses, y al punto de intersección en dos focos. O, que el punto de intersección deviene en dos focos, lo cual transforma el límite en una elipse, y a las líneas radiales en hipérbolas.

En breve: *un proceso físico de acción mínima es una acción conexa. Al cambiar cualquier aspecto del proceso, cambia todo lo demás en el mismo de conformidad, a fin de preservar su característica de acción mínima. Lo que es primordial es el principio físico de acción mínima.*

Fue el genio de Riemann el que reconoció, mediante esta aplicación del "principio de Dirichlet", que el principio de acción mínima de un proceso físico podía entenderse a cabalidad por la relación entre las condiciones límite y las singularidades, y que esta relación podía expresarse de forma única mediante el concepto geométrico de Riemann de las funciones complejas. Es más, Riemann demostró que la característica de acción mínima de una proceso físico podría alterarse, de modo fundamental, tan sólo añadiendo un nuevo principio. Ese cambio de principio cobra expresión en una función compleja como un aumento correspondiente en el número de singularidades. En su ***Teoría de las funciones abelianas,*** Riemann demostró esto aplicando el "principio de Dirichlet" a las funciones trascendentales superiores de Abel.

Sólo podemos aludir el significado más hondo de este descubrimiento en esta ocasión, y lo retomaremos a mayor profundidad después, pero puede ilustrarse con la animación que representa la **figura 11,** la cual expresa el principio de acción mínima con respecto a una función elíptica. Riemann demostró que, por formarse a partir de la interacción de dos principios conexos, todas las funciones elípticas se expresan en el dominio complejo como superficies con dos límites. Cada límite cambia de manera diferente, pero en conexión con el otro, causando los cambios correspondientes en las trayectorias mínimas, mientras que en todo momento conserva la relación armónica general de la función. En otras palabras, la curvatura característica de estas trayectorias de acción mínima la determina, en este caso, la interacción conexa de dos principios distintos.

Una comparación de esto con los ejemplos previos indica lo que Riemann puso de relieve: que la única forma de cambiar en lo fundamental la característica de acción de un proceso físico, es añadiendo la acción de un nuevo principio. Esta interrogante más avanzada habrá de investigarse con mayor amplitud en futuros ejercicios pedagógicos.

Un ejemplo significativo de la economía puede ayudar a ilustrar este principio. ¿Cuál es la relación entre toda relación físico–económica, y las condiciones límite económicas de la infraestructura física y el desarrollo cultural? ¿Cuál es la relación entre estas condiciones límite y las singularidades que representa la introducción de nuevas tecnologías? ¿Cuál es el efecto de un cambio, positivo o negativo, de estas condiciones límite físico–económicas sobre toda relación económica?

Cuatro años después de la muerte de Riemann, Karl Weierstrass criticó en términos matemático–formales a Riemann, por su aplicación del "principio de Dirichlet". Weierstrass alegaba que no era adecuado hablar de la acción mínima en términos matemáticos, a menos que pudiera presentarse una prueba matemática formal que probara que existía un mínimo o un máximo matemático. Aunque es posible producir un ejemplo matemático formal que no tenga mínimo, a todo proceso *físico* lo caracteriza la acción mínima acotada.

Por ejemplo, como mostró Nicolás de Cusa, no hay un polígono máximo ni mínimo absoluto, porque el polígono está máximamente acotado por un círculo (el cual no es un polígono) y mínimamente por una línea (que tampoco es un polígono). O, en tanto que una catenaria matemática puede extenderse a infinito, a una física siempre la acotan sus puntos de sujeción. Para Riemann, al igual que para Gauss y Dirichlet, la exigencia de Weierstrass de que hubiera una prueba matemática formal de un mínimo, era menos que innecesaria: era una sofistería. El principio físico universal de acción mínima bastaba para proporcionar la prueba.

Los formalistas hicieron suya la crítica de Weierstrass, pues estaban desesperados por minimizar los logros de Kästner, Gauss, Dirichlet, Jacobi, Abel, Riemann *etc.,* y regresar la ciencia a los días rastreros de Euler, Lagrange y D'Alembert. Por consiguiente, en tanto que ha habido una amplia discusión sobre la forma de los descubrimientos de Riemann, la sustancia de su pensamiento en general fue suprimida, hasta que cobró nueva vida en los descubrimientos más avanzados de Lyndon LaRouche.

—Traducción de Manuel Hidalgo.

Dirichlet y el movimiento de juventudes mendelssohnianas

por David Shavin

Cuando Lejeune Dirichlet, a la edad de 23 años, trabajaba con Alejandro de Humboldt tomando mediciones microscópicas de los movimientos de una barra imantada suspendida en el aire, en una pequeña cabaña construida para ese propósito en el jardín de Abraham Mendelssohn, podía escuchar, enseguida en la casa de verano, al movimiento de juventudes mendelssohnianas trabajando las voces de ***La Pasión según san Mateo*** de J.S. Bach. Los hermanos Félix y Fanny Mendelssohn, de 19 y 23 años, respectivamente, encabezaban un grupo de 16 amigos que se reunían las noches de los sábados de 1828 a explorar esta obra "muerta", sin ejecutar desde que Bach la estrenó un siglo antes.[1]

Los dos proyectos simultáneos que tenían lugar en el jardín de Mendelssohn

1. Bach compuso y presentó esta obra en Leipzig en 1729. Félix recibió el manuscrito de manos de su tía Sarah Itzig Levy, una defensora de Bach. Uno también podría decir que fue una casualidad