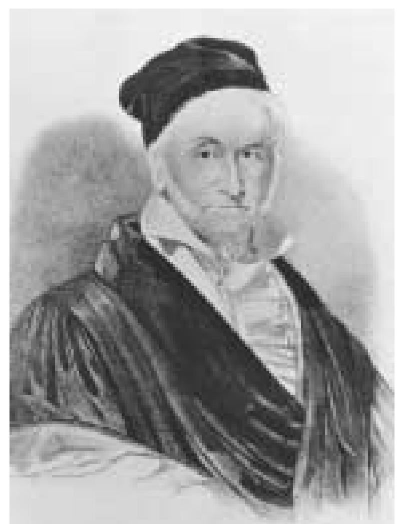
Volviendo visible lo invisible

El teorema fundamental del álgebra

por Bruce Director



Carl Friedrich Gauss.

1. La declaración de independencia de Gauss

En septiembre de 1798, después de tres años de estudios, el gran matemático Carl Friedrich Gauss, entonces de 21 años de edad, abandonó la Universidad de Gotinga sin recibir un diploma. Regresó a su ciudad natal, Braunschweig, para empezar a escribir su *Disquisitiones Arithmeticae,* y, sin perspectivas de empleo, abrigaba la esperanza de seguir recibiendo su estipendio de estudiante, sin la seguridad de que su benefactor, Carl Wilhelm Ferdinand, duque de Braunschweig, se lo daría. Después de vivir de fiado varios meses, el Duque le dejó saber que su estipendio continuaría, con tal de que Gauss obtuviera su título de doctorado en filosofía, una tarea que Gauss consideraba una distracción, y que deseaba posponer.

No obstante, Gauss aprovechó la oportunidad de hacer una virtual declaración de independencia del asfixiante mundo de las matemáticas deductivas, en la forma de una tesis escrita que envió al profesorado de la Universidad de Helmstedt, sobre una nueva prueba del teorema fundamental del álgebra. En cosa de meses, recibió su doctorado sin siquiera tener que presentarse para un examen oral.

Describiendo su intención a su ex compañero de clase, Wolfgang Bolyai, Gauss escribió: "El título [teorema fundamental] indica de forma categórica el propósito del ensayo; sin embargo, sólo un tercio del mismo se usa para este propósito; el resto contiene principalmente la historia y una crítica del trabajo de otros matemáticos (a saber, d'Alembert, Bougainville, Euler, de Foncenex, Lagrange y los enciclopedistas. . . quienes, sin embargo, tal vez no estarán muy contentos) sobre el mismo tema, además de muchos y variados comentarios sobre la superficialidad que predomina tanto en nuestras matemáticas actuales".

En esencia, Gauss defendió y amplió un principio que se remonta a Platón, en el que sólo la acción física define nuestra noción de magnitud, y no los supuestos arbitrarios. Como Platón, Gauss reconoció que no bastaría simplemente con declarar su descubrimiento, a menos que lo combinara con un ataque polémico contra las falsedades aristotélicas que se habían vuelto tan populares entre sus contemporáneos.

Viendo su disertación 50 años después, Gauss dijo: "La demostración se presenta tomando expresiones prestadas de la geometría de posición; porque de este modo se alcanza la mayor agudeza y simplicidad. Fundamentalmente, el contenido esencial de todo el argumento pertenece a un dominio superior, independiente del espacio [es decir, antieuclidiano], en el que los conceptos generales de magnitud se investigan como combinaciones de magnitudes conectadas por continuidad: un dominio que, al presente, se ha desarrollado poco, y en el que uno no puede moverse sin tomar prestado el lenguaje de las imágenes espaciales".

Mi intención es ofrecer un bosquejo resumido de la historia de esta idea, y de su desarrollo por Gauss. No puede ser exhaustivo. Más bien, busco trazar los pasos que deberían formar la base de diálogos pedagógicos orales, que ya están en marcha en varios lugares.[1]

Magnitud múltiplemente extendida

Los círculos asociados con Platón ya habían desarrollado un concepto físico cabal de magnitud, que se expresa más explícitamente en los diálogos *Menón, Teetetes* y *Timeo.* Platón y los suyos demostraron este concepto de manera pedagógica por medio de las paradojas que surgen cuando se considera la singularidad de los cinco sólidos regulares, y los problemas relacionados de doblar de una línea, un cuadrado y un cubo. Como Platón subrayó, cada especie de acción generaba una magnitud de especie diferente. Él denominó a tales especies con la palabra griega *dúnamis* (raíz de la palabra dínamo), término que mejor se puede vertir al español como *poder*.[2] El significado de *dúnamis* es similar al uso que hace Godofredo G. Leibniz de la palabra alemana *kraft.*

Esto es, que una magnitud lineal tiene el "poder" de doblar una línea, mientras que sólo una magnitud de una especie diferente tiene el "poder" de doblar un cuadrado, y aun una especie diferente tiene el "poder" de doblar un cubo [ver **figuras 1(a)–(c)**]. En el lenguaje de Bernhard Riemann, a estas magnitudes se les llama, de manera respectiva: simplemente, doblemente y triplemente extendidas. El grupo de Platón destacó que las magnitudes de menor extensión carecían del potencial para generar magnitudes de extensión superior, creando, conceptualmente, una sucesión de "poderes superiores".

No pensemos aquí en el uso deductivo del término "dimensión". Aunque "dimensión" es una palabra perfectamente correcta, en la usanza moderna a menudo se le asocia con la idea kantiana del espacio euclidiano formal, en la cual se considera al espacio como una combinación de tres dimensiones independientes, simplemente extendidas.

Pensemos, mejor, en "extensión física". Una línea se produce por medio de una acción física de extensión simple. Puede que a una superficie la confinen líneas, pero no está hecha de líneas; más bien, una superficie está, de manera irreducible, doblemente extendida. Asimismo, a un volumen pueden confinarlo superficies, a su vez confinadas por líneas, empero, de forma irreducible, está triplemente extendido.

Así, una unidad de línea, de cuadrado o de cubo puede caracterizarse por el número *uno,* pero cada *uno* es de una especie diferente de poder.

El grupo de Platón también subrayó que esta sucesión de magnitudes de poderes superiores era generada por una sucesión de tipos de acción diferentes. Específicamente, la *acción lineal* la producía una magnitud simplemente extendida, la *acción circular* una doblemente extendida, y la *acción circular extendida* una triplemente extendida, como las acciones de rotación que generan un cono, un cilindro o un toro. Platón presenta esto de forma pedagógica en el diálogo *Menón,* con respecto a las magnitudes doblemente extendidas, y en *Timeo,* respecto a la singularidad de los cinco sólidos regulares y el problema de doblar el cubo. Arquitas, colaborador de Platón, demostró que la magnitud que dobla a un cubo no se genera por la acción circular, sino por la acción circular extendida, es decir, las secciones cónicas [ver **figuras 2(a)** y **2(b)**].

Le correspondió a Apolonio de Perga (262–200 a.C.) presentar una exposición completa de la generación de magnitudes de poderes superiores en su trabajo sobre las *Cónicas.* Apolonio investigó de manera exhaustiva la generación de magnitudes doble y triplemente extendidas, a las que distinguió entre lugares geométricos planos (el círculo/la línea), y sólidos (la elipse, la parábola, la hipérbola).

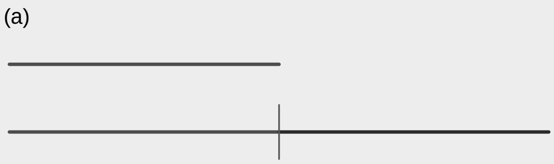
Como Abraham Gotthelf Kästner indica en su *Historia de las matemáticas* (1797), la investigación de las relaciones entre poderes superiores dio paso a lo que se conocería con la palabra de origen árabe, *álgebra;* y a partir de Leibniz (1644–1716) en adelante, como *análisis.* Aquí, se investigó la relación de magnitudes del segundo poder (los cuadrados), y del tercer poder (los cubos) en la forma de ecuaciones algebraicas cuadráticas y cúbicas, respectivamente. Entretanto, las ecuaciones superiores del tercer grado cobraron una importancia formal, pero carecían del referente físico visible de las cuadráticas y cúbicas.

Girolamo Cardano (1501–1576) y, posteriormente, Leibniz, mostraron que había un "hueco" en toda forma de ecuación algebraica, como mostraba la aparición de raíces cuadradas de números negativos como soluciones a ciertas ecuaciones. Escudriñando este "hueco", Leibniz reconoció que el álgebra no podía enseñar nada sobre la física, pero que, más bien, un principio físico general subsume a todas las ecuaciones algebraicas, de cualquier poder.

Leibniz, en una carta que escribió en 1675 a Christian

1. Estos ejercicios pedagógicos forman parte de una serie llamada, "Riemann for Anti-Dummies" (Riemann para antitontos), que inició como un proyecto de estudio de los miembros y amigos del movimiento internacional de Lyndon LaRouche. Ver también, "The Division of the Circle and Gauss's Concept of the Complex Domain" (La división del círculo y el concepto de Gauss del dominio complejo), por Bruce Director, en *21st Century Science & Technology,* número de invierno de 2001–2002 (vol. 14, núm. 14).

2. Nota del traductor: comúnmente, *dúnamis* se ha traducido al español como *potencia*, término que conservamos para las exponenciales. Por ejemplo: 4^9 (4 a la novena *potencia*).



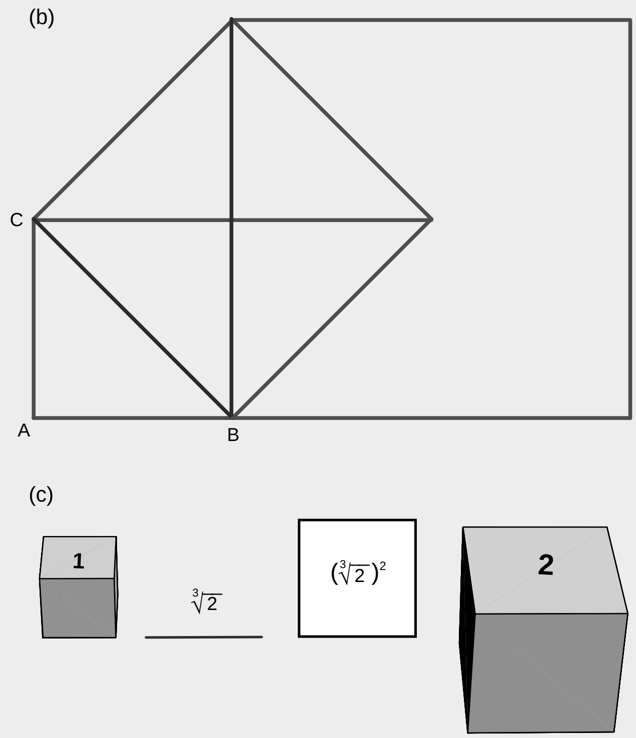


FIGURA 1. *La acción de doblar y los "poderes". (a) La magnitud que tiene el "poder" de doblar la longitud de una línea se produce por la extensión simple. (b) La magnitud con el poder de doblar el área de un cuadrado, es la diagonal del cuadrado más pequeño, y se le conoce como "la media geométrica" entre los dos cuadrados. La magnitud de la diagonal BC es inconmensurable en relación a la magnitud del lado AB del cuadrado más pequeño, y no puede generarse por esta última. (c) La magnitud que tiene el poder de doblar el volumen de un cubo es diferente de las magnitudes con el poder de doblar un cuadrado o una línea. Es la menor de dos medias geométricas entre los dos cubos. Esta magnitud es inconmensurable en relación a las otras dos magnitudes inferiores, la línea y el cuadrado.*

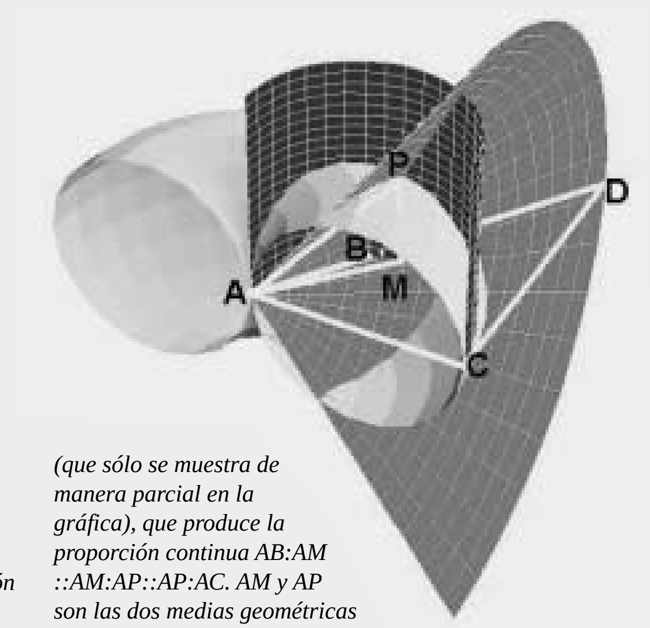


FIGURA 2. *La construcción de Arquitas para doblar el cubo. Arquitas ideó una construcción para encontrar dos medias geométricas entre dos magnitudes, AC y AB. La magnitud AC se traza como el diámetro del círculo ABC; AB es una cuerda del círculo. Usando este círculo como base, se genera un cilindro. Entonces, se rota 90° al círculo alrededor de AC, de modo que quede perpendicular al plano del círculo ABC; después se rota alrededor del punto A para formar un toro de diámetro cero.(La intersección del toro con el cilindro produce una curva de curvatura doble.) La cuerda AB se extiende hasta que interseca la perpendicular con AC en el punto D; esto forma el triángulo ACD, que se encuentra en el plano del círculo ABC, AB y AC. El triángulo ACD se rota entonces alrededor de AC, produciendo un cono. Todos, el cono, el toro y el cilindro, intersecan en el punto P. Luego se traza la perpendicular PM desde P, sobre la superficie del cilindro, hasta que interseca con el círculo ABC en el punto M; esto forma el triángulo recto AMP. Por medio de esta construcción se genera una serie de triángulos rectos similares (que sólo se muestra de manera parcial en la gráfica), que produce la proporción continua AB:AM ::AM:AP::AP:AC. AM y AP son las dos medias geométricas entre las magnitudes AC y AB.*

Huyghens (1629–1695) sobre las raíces cuadradas de los números negativos, añadió que había inventado una máquina que producía exactamente la acción requerida por este principio físico general:

"Parece que después de este instrumento, no puede desearse casi nada más para el uso que el álgebra puede o podría tener en la mecánica y en la práctica. Es creíble que este era el objetivo de la geometría de los antiguos (al menos de Apolonio) y el propósito de los *lugares geométricos*, que él introdujo, porque reconoció que unas cuantas líneas determinan instantáneamente lo que largos cálculos numéricos sólo podrían lograr después de un arduo trabajo capaz de desalentar al más pintado".

Aunque determinó la acción física que generaba una sucesión de poderes superiores, Leibniz dejó abierta la cuestión de cuál era la acción física que producía las raíces cuadradas de los números negativos.

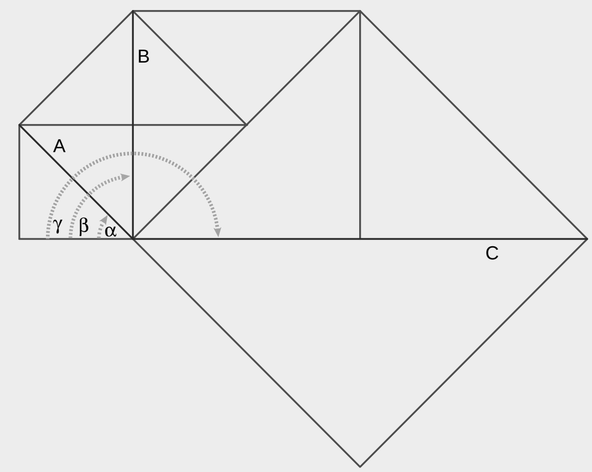


FIGURA 3. *El principio de "cuadrar" implica doblar el ángulo de rotación y cuadrar la longitud. El ángulo* β *es el doble del ángulo* α*, y el ángulo* γ *es el doble del ángulo* β*. También, la longitud de B es el cuadrado de A, y la longitud de C es el cuadrado de B.*

La prueba de Gauss del teorema fundamental

Para cuando Gauss abandonó Gotinga, ya había desarrollado un concepto de realidad física de las raíces cuadradas de los números negativos, al que llamó: *números complejos*. Gauss, adoptando el método de la metáfora de la caverna, de la *República* de Platón, comprendió que sus números complejos eran sólo sombras que reflejaban un complejo de acciones físicas (la acción actuando sobre la acción). Esta acción compleja reflejaba un poder superior a la acción triplemente extendida que caracteriza a la multiplicidad del espacio visible.

La contribución singular de Gauss fue idear una metáfora que significara estas formas superiores de acción física, de modo que pudieran representarse, por medio de sus reflejos, en el dominio visible.

En su disertación de 1799, Gauss optó de manera brillante por desarrollar su metáfora de forma polémica, en el flanco más vulnerable de las ecuaciones algebraicas de sus oponentes. Al igual que Leibniz, Gauss rechazó la perspectiva deductiva en la investigación de las ecuaciones algebraicas en sus propios términos, insistiendo en que era la acción física la que determinaba las características de las ecuaciones.

Un ejemplo simple nos ayudará a ilustrar la cuestión. Piensa en el significado físico de la ecuación $x^2=4$. Sabemos que x se refiere al lado de un cuadrado cuya área es 4. Así, 2 es una solución a la ecuación. Ahora, piensa en el significado físico de la ecuación $x^2=-4$. Desde un punto de vista deductivo formal, esta ecuación se refiere al lado de un cuadrado cuya área es −4. Empero, ¿cómo un cuadrado puede tener un área (negativa) de −4? Formalmente, la segunda ecuación puede resolverse introduciendo el número $2\sqrt{-1}$, o $2i$ (donde i denota $\sqrt{-1}$), que, cuando se eleva al cuadrado, es igual a −4. Pero la interrogante sigue, ¿cuál es el significado físico de $\sqrt{-1}$?

Una respuesta sería decir que $\sqrt{-1}$ no tiene significado físico, y por tanto la ecuación $x^2=-4$ no tiene solución. A esto, Euler y Lagrange le añadieron la sofistería, muy ridiculizada por Gauss en su disertación, de que la ecuación $x^2=-4$ tiene una solución, ¡pero que esa solución es imposible!

Gauss demostró el significado físico de $\sqrt{-1}$, no en el dominio visible de los cuadrados, sino en el dominio *cognoscitivo* del *principio* de cuadrar.

Esto puede ilustrarse pedagógicamente si trazas un cuadrado, cuya área llamaremos 1. Luego, traza una diagonal *A* de ese cuadrado, y traza un nuevo cuadrado usando esa diagonal como lado. El área del nuevo cuadrado será 2. Ahora, repite esta acción para generar un cuadrado cuya área sea 4 (ver **figura 3**).

¿Cuál es el principio de cuadrar que ilustra esto? La acción que generó la magnitud que produjo el cuadrado cuya área es 2, fue una rotación de 45° y una extensión de la longitud de 1, el lado del primer cuadrado, a $\sqrt{2}$, su diagonal, que se convirtió en el lado del siguiente cuadrado. Para producir el cuadrado cuya área es 4, la rotación de 45° se dobló a 90°, y la extensión se cuadró para convertirse en 2. Repite este proceso varias veces para ilustrar que el principio de cuadrar puede considerarse como la acción física combinada de doblar una rotación y cuadrar una longitud. La raíz cuadrada es simplemente la acción inversa, ésto es, dividir a la mitad el ángulo de rotación y disminuir la longitud por la raíz cuadrada.

Ahora, traza un círculo N y un diámetro, y aplica esta acción física de cuadrar a cada punto sobre el círculo. Esto es, toma cualquier punto sobre la circunferencia del círculo (el punto *z* en la figura). Traza el radio que conecta a ese punto con el centro del círculo. Ese radio forma un ángulo con el diámetro que trazaste. Para "cuadrar" ese punto, dobla el ángulo α entre el radio y el diámetro para formar el ángulo β, y

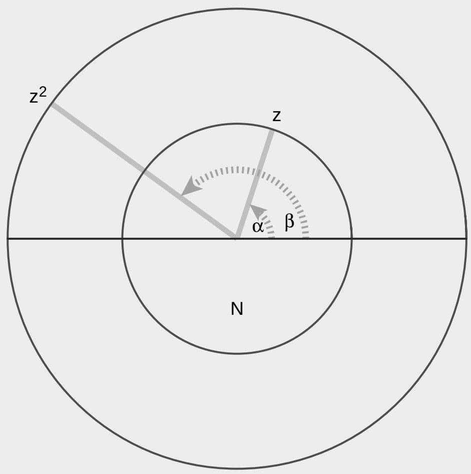


FIGURA 4. *Cuadrando un número complejo. El principio general de "cuadrar" puede desarrollarse sobre un círculo. z^2 se produce a partir de z, al doblar el ángulo α y cuadrar la distancia desde el centro del círculo hasta z.*

cuadra la longitud. Repite esta acción con varios puntos. Pronto podrás observar que todos los puntos del primer círculo se proyectan como puntos sobre un círculo concéntrico más grande, cuyo radio es el cuadrado del círculo original. Pero, esto se vuelve más y más interesante. Puesto que doblas el ángulo cada vez que cuadras un punto, el círculo original se proyectará en el círculo "cuadrado" dos veces (ver **figura 4**).

Hay un ejemplo físico que ilustra este proceso. Toma un imán y mueve una brújula a su alrededor. Mientras la brújula se mueve del polo norte al sur del imán (180°), la aguja de la brújula completará una revolución (360°). Y en tanto se mueve del polo sur de vuelta al norte, la aguja completará otra revolución. En efecto, ¡el imán "cuadra" la brújula!

Gauss asoció sus números complejos con este tipo de acción física compuesta (rotación combinada con extensión). Los hizo visibles, metafóricamente, como una acción espiral proyectada sobre una superficie. Cada punto sobre esa superficie representa un número complejo. Cada número expresa una combinación única de rotación y extensión. El punto de origen de la acción en última instancia se refiere a la singularidad física, como la del punto inferior de la catenaria, o los polos de rotación de la Tierra, o el centro del imán.

En el ejemplo anterior, considera al círculo original como una unidad de círculo en el dominio complejo. El centro del círculo es el origen, indicado por O, los extremos del diámetro los denotan 1 y –1. La raíz cuadrada de –1 se encuentra al dividir en dos la rotación entre 1 y –1, y reduciendo el radio por la raíz cuadrada. Piensa con cuidado y verás que los puntos sobre la circunferencia que se encuentran en medio de 1 y –1 representan a $\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$ (ver **figura 5**).

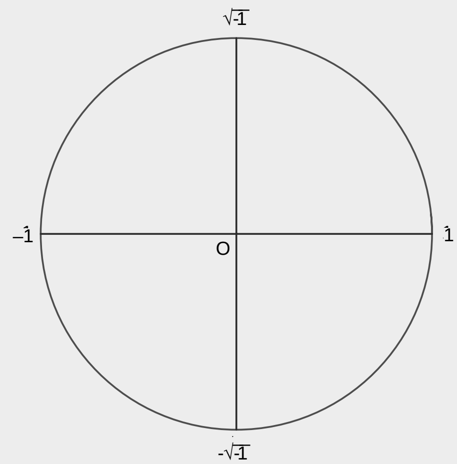


FIGURA 5. *La unidad de acción en el dominio complejo de Gauss.*

Gauss demostró que todos los poderes algebraicos, de cualquier grado, cuando se proyectan en su dominio complejo, podrían representarse por una acción parecida a la que acabamos de demostrar para la acción de cuadrar. Por ejemplo, la acción de cubicar un número complejo se logra triplicando el ángulo de rotación y cubicando la longitud. Esto hace que el círculo original se proyecte tres veces en un círculo cuyo radio es el cubo del círculo original. La acción asociada con el poder bicuadrático (de cuarto grado) implica cuadruplicar el ángulo de rotación y cuadrar el cuadrado de la longitud. Esto hará que el círculo original se proyecte cuatro veces en un círculo cuyo radio aumenta por el cuadrado del cuadrado, y así sucesivamente para todos los poderes superiores.

Así, aunque las multiplicidades de acción asociadas a estos poderes superiores existen fuera de la multiplicidad triplemente extendida del espacio visible, Gauss develó, en su dominio complejo, la característica de acción que las produce.

2. Volviendo visible lo invisible

Cuando Carl Friederich Gauss le escribió a Wolfgang Bolyai en 1798, criticando la 'superficialidad' de las matemáticas de la época, hablaba literalmente, y no sólo de su época, sino también de la nuestra. Entonces, como ahora, se había hecho popular entre los académicos desdeñar, e incluso ridiculizar, cualquier esfuerzo por descubrir principios físicos universales, limitando el campo de la investigación científica a la tarea aparentemente más práctica de describir sólo lo que es visible en la superficie. Irónicamente, como Gauss demostró en su disertación doctoral de 1799 sobre el teorema fundamental del álgebra, lo que está en la superficie sólo se revela si uno sabe lo que lo subyace.

El método de Gauss era uno antiguo, que hizo famoso la metáfora de la caverna, de Platón, y que cobrara nueva potencia con la aplicación de Johannes Kepler del método de la *Docta ignorancia* de Nicolás de Cusa. Para ellos, la tarea del científico era hacer visibles los principios físicos subyacentes que no pueden observarse directamente; lo invisible que guía a lo visible.

Para ilustrar esto, tomemos como ejemplo el descubrimiento de Fermat del principio de que la luz refractada sigue la trayectoria de tiempo mínimo, en vez de la de menor distancia que sigue la luz reflejada. El principio de menor distancia se encuentra en la superficie, y puede demostrarse en el dominio de lo visible. Por su parte, el principio del tiempo mínimo existe "detrás", por así decirlo, de lo visible, y puede verse sólo en la mente. Reflexionando un poco, es claro que el principio del tiempo mínimo siempre estuvo ahí, controlando, invisiblemente, al principio de menor distancia. En los términos de referencia de Platón, el principio del menor tiempo es de un "poder superior" que el de menor distancia.

El descubrimiento de Fermat es un punto de referencia útil para comprender el concepto del dominio complejo de Gauss. Como Gauss mismo puntualizó inequívocamente, el dominio complejo no se refiere al concepto superficial, formal, de los números imaginarios o "imposibles" que desarrolló Euler, y que enseñan los "expertos" desde entonces. Más bien, el concepto de Gauss del dominio complejo, como el principio del tiempo mínimo de Fermat, trae a la superficie un principio que siempre estuvo ahí, pero escondido a la vista.

Lo algebraico y lo trascendental

Como subrayó Gauss en la revisión de su disertación de 1799, el concepto del dominio complejo es un "dominio superior", independiente de todos los conceptos *a priori* del espacio. No obstante, es un dominio "en el que uno no puede moverse sin tomar prestado el lenguaje de las imágenes espaciales".

Su objetivo, como el de Leibniz, era encontrar un principio general que caracterizara lo que llegó a conocerse como magnitudes "algebraicas". Estas magnitudes, inicialmente relacionadas con la extensión de líneas, cuadrados y cubos, están comprendidas bajo el concepto de *dúnamis*, o poder, de Platón.

Leibniz había demostrado que, en tanto que el dominio de todas las magnitudes "algebraicas" consistía en una sucesión de poderes superiores, este dominio algebraico en su totalidad lo dominaba un poder aun superior, que llamó "trascendental". La relación entre el dominio inferior de las magnitudes algebraicas, y el superior, no algebraico, de las magnitudes trascendentales, se refleja en el descubrimiento de Jakob Bernoulli de la espiral equiangular (ver **figura 6**).

Leibniz demostró más tarde, junto con el hermano de Jakob, Johann Bernoulli, que este dominio trascendental superior no existe como un principio puramente abstracto, sino que se origina en la acción física de una cadena suspendida, cuya forma geométrica Christiaan Huyghens llamó una *catenaria* (ver **figura 7**). Así, el propio universo físico demuestra que las magnitudes "algebraicas" relacionadas con la extensión no se generan por ésta, sino a partir de un principio físico que existe más allá de la simple extensión, en el dominio trascendental, superior.

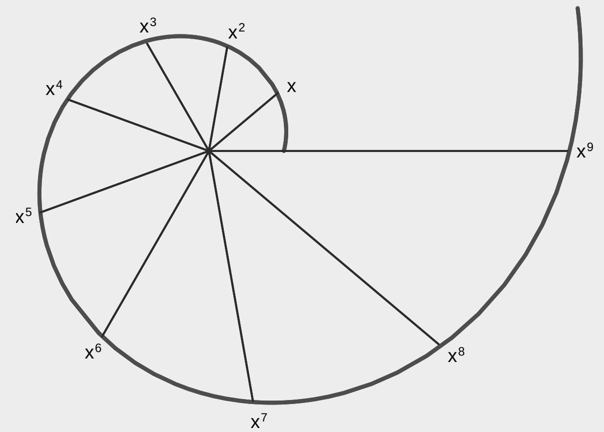


FIGURA 6. *Una espiral autosimilar genera una sucesión de poderes algebraicos. Para áreas iguales de rotación, la longitud de los radios correspondientes aumenta al siguiente poder.*

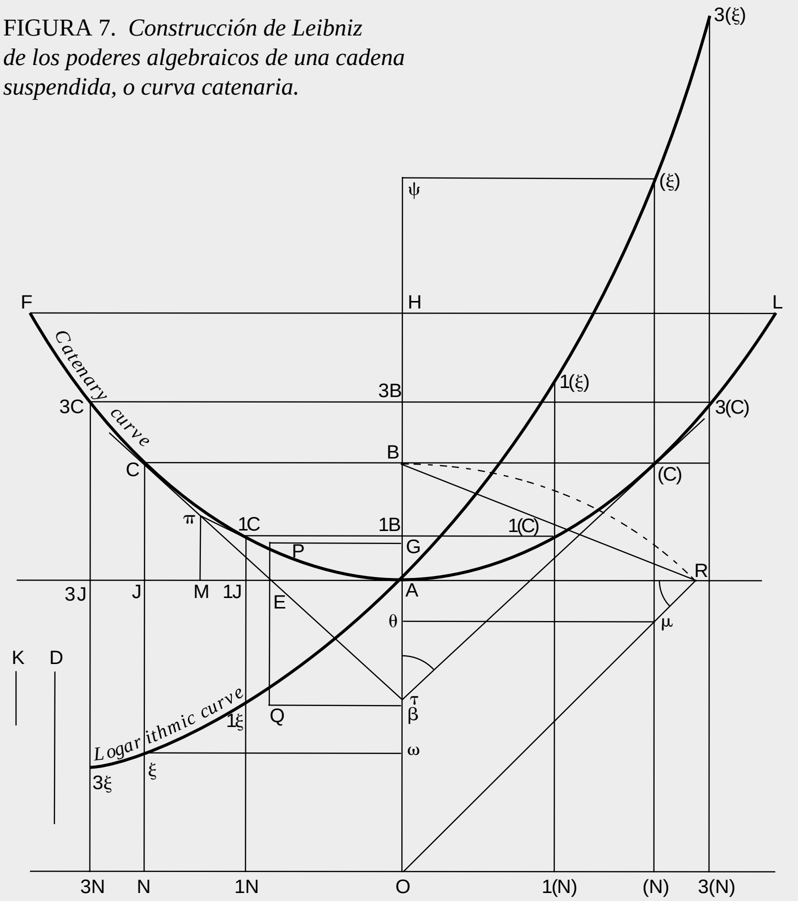
En sus pruebas del teorema fundamental del álgebra, Gauss demostró que, aunque este principio físico trascendental no estaba en el dominio de lo visible, de cualquier modo "proyecta una sombra" que puede hacerse visible en lo que él llamó el dominio complejo.

Como se indicó en la primera parte, se descubrió un principio general para magnitudes algebraicas viendo a través del "hueco" que representan las raíces cuadradas de los números negativos. Estas raíces cuadradas aparecían como soluciones a ecuaciones algebraicas, pero carecían de significado físico aparente alguno. Por ejemplo, en la ecuación algebraica $x^2=4$, x es el lado de un cuadrado cuya área es 4; mientras que, en la ecuación $x^2=-4$, x es el lado de un cuadrado de área -4, algo aparentemente imposible.

En el primer caso, es fácil ver que una línea cuya longitud es 2 sería el lado de un cuadrado de área 4; sin embargo, desde el punto de vista algebraico, una línea cuya longitud es -2, también produce un cuadrado de área 4. A primera vista, una línea de longitud -2 parece tan imposible como un cuadrado de área -4; sin embargo, si dibujas un cuadrado de área 2, verás que tiene dos diagonales, ambas con el poder de producir un nuevo cuadrado de área 4. Estas dos magnitudes sólo se diferencian la una de la otra por su dirección, así que una se designa como 2 y la otra como -2.

Ahora, extiende la investigación al cubo. En la ecuación algebraica $X^3=8$, parece haber sólo un número, el 2, que satisface la ecuación, y este número es la arista de un cubo cuyo

FIGURA 7. *Construcción de Leibniz de los poderes algebraicos de una cadena suspendida, o curva catenaria.*



"Dados una línea recta indefinida ON paralela al horizonte, y OA, un segmento perpendicular igual a O3N, y sobre 3N un segmento vertical 3Nξ, que, con OA, mantiene la proporción de D con K, encuéntrese la media proporcional 1N1ξ (entre AO y 3N3ξ; luego, entre 1N1ξ y 3N3ξ; luego, a su vez, encuéntrese la media proporcional entre 1N1ξ y OA; mientras continuamos de este modo en la búsqueda de segundas medias proporcionales, y, a partir de ellas, terceras proporcionales, sígase la curva 3ξ-1ξ-A-1(ξ)-3(ξ), de modo que, cuando se toman los intervalos equivalentes 3N1N, 1NO, O1(N), 1(N)3(N), etc., las ordenadas 3N3ξ, 1N1ξ, OA, 1(N)1(ξ), 3(N)3(ξ), se encuentran en una progresión geométrica continua, haciendo contacto con la curva que por lo general identifico como logarítmica. Así, al tomarse a ON y O(N) como iguales, elévese sobre N y (N) los segmentos NC y (N)(C), que son iguales a la semisuma de Nξ y (N)(ξ), tal que C y (C) serán dos puntos de la curva catenaria FCA (C)L, sobre la que pueden determinarse geométricamente tantos puntos como se deseen.

"Y viceversa, si la curva catenaria se construye de forma física, suspendiendo una cuerda o una cadena, pueden construirse a partir de ella tantas medias proporcionales como se quieran, y encontrarse los logaritmos de los números, o los números de los logaritmos. Si se busca el logaritmo del número O ω, esto es, el logaritmo de la proporción entre OA y O ω, donde OA (que escogí como unidad, y que también llamaré parámetro) se considera igual a cero, debe tomarse la tercera proporcional O ψ de O ω y OA; luego, escójase la abscisa como la semisuma de OB desde O ω y O ψ, y la ordenada correspondiente BC u ON sobre la catenaria será el logaritmo que se busca, correspondiente al número propuesto. Y de forma recíproca, si el logaritmo ON está dado, debe tomarse el doble del segmento vertical NC que se desprende de la catenaria, y cortarse en dos segmentos cuya media proporcional debe ser igual a OA, que es la unidad dada (es un juego de niños); los dos segmentos serán los números buscados, uno mayor y el otro menor que 1, correspondiendo al logaritmo propuesto".

—G.G. Leibniz, "Dos documentos sobre la curva catenaria y la curva logarítmica", de la revista "Acta Eruditorum", 1691 (ver Fidelio, número de la primavera de 2001, vol. X, núm. 1).

volumen es 8. Esta parece ser la única solución, puesto que (–2)(–2)(–2)=–8, es otra aparente imposibilidad. La anomalía de que hay dos soluciones en el caso de una ecuación cuadrática, parece desaparecer en el caso del cubo, para el que parece haber sólo una solución.

Trisectando un ángulo

Pero, no tan rápido. Mira otro problema geométrico que, al representarse en términos algebraicos, presenta la misma paradoja: la trisección de un ángulo arbitrario. Igual que al doblar el volumen del cubo, los geómetras griegos tampoco pudieron encontrar una media proporcional para trisectar un ángulo arbitrario, desde el propio principio de acción circular. Los diversos métodos descubiertos (por Arquímedes, Eratóstenes y otros) para encontrar un principio general de trisectar un ángulo, eran parecidos a aquellos que descubrieron los colaboradores de Platón para doblar el cubo. Esto es, esta magnitud no puede construirse usando sólo un círculo y una línea recta, sino que requería emplear la acción circular extendida, tal como la acción cónica. Pero trisectar un ángulo arbitrario presenta otro tipo de paradoja, que no es tan patente en el problema de doblar el cubo. Para ilustrar esto, realiza el siguiente experimento:

Traza un círculo (ver **figura 8**). Para hacer más clara la ilustración, marca un ángulo de 60°. Es claro que un ángulo de 20° trisectará este ángulo. Ahora, súmale una revolución

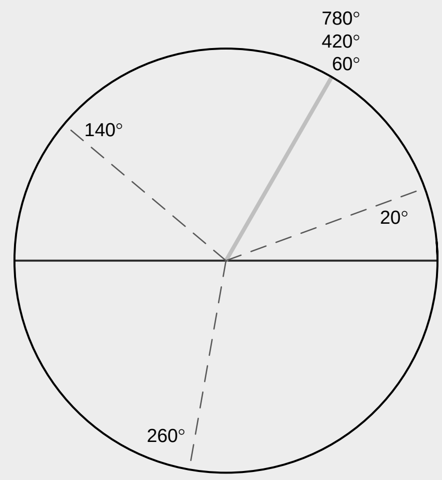


FIGURA 8. *Un ejemplo de las tres soluciones a la trisección de un ángulo.*

completa al ángulo de 60°, formando un ángulo de 420°. Pareciera que estos dos ángulos, 60° y 420°, en esencia son lo mismo, pero cuando divides 420° entre tres, obtienes un ángulo de 140°. Añade otra rotación de 360°, y llegamos a un ángulo de 780°, que pareciera ser exactamente lo mismo que los ángulos de 60° y 420°. Sin embargo, cuando dividimos 780° entre tres obtenemos un ángulo de 260°. Continua haciendo esto y verás que se repite la misma pauta una y otra vez.

Visto como una "certeza sensorial", el ángulo de 20° es el único que trisecta al de 60°. Sin embargo, cuando uno ve más allá de la certeza sensorial, es claro que hay tres ángulos que "resuelven" el problema.

Esto ilustra otro "hueco" en la determinación algebraica de magnitud. En el caso de las ecuaciones cuadráticas, pareciera haber dos soluciones para cada problema. En algunos casos, como x^2=4, esas soluciones parecen tener una existencia visible; en tanto que para x^2=–4, hay 2 soluciones, $2\sqrt{-1}$ y $-2\sqrt{-1}$, las cuales, ambas, parecen ser "imaginarias", sin significado físico. En el caso de las ecuaciones cúbicas, a veces hay tres soluciones visibles, como en el caso de la trisección de un ángulo; pero al doblar el cubo, pareciera haber sólo una solución visible y dos "imaginarias": $-1-(\sqrt{3})(\sqrt{-1})$; y $-1 + (\sqrt{3})(\sqrt{-1})$.

Las ecuaciones bicuadráticas, como x^4=16, que parecieran no tener significado físico en sí mismas, tienen 4 soluciones, 2 "reales" (2 y –2) y dos "imaginarias" ($2\sqrt{-1}$ y $-2\sqrt{-1}$).

Todo se torna más confuso con magnitudes algebraicas de poderes aún superiores. Esta anomalía establece la interrogante que Gauss resolvió en su prueba de lo que llamó el "teorema fundamental" del álgebra: *¿Cuántas soluciones existen para cualquier ecuación algebraica dada?*

Los matemáticos de razonamiento "superficial" en la época de Gauss, como Euler, Lagrange y D'Alembert, respondieron con la perspectiva superficial de que una ecuación algebraica tendrá tantas soluciones como potencias tenga, aunque algunas de estas soluciones sean "imposibles", como la raíz cuadrada de los números negativos. (Este argumento sofista es como decir: "Hay una diferencia entre el hombre y las bestias, pero no significa nada".)

Las sombras de las sombras: el dominio complejo

En su disertación de 1799, Gauss polemizó y puso al descubierto este fraude como la sofistería que era: "Si alguien dijera que un triángulo rectángulo equilátero rectilíneo es imposible, nadie lo negaría. Pero si pretendiese proponer semejante triángulo imposible como una nueva especie de triángulos y aplicarle otras cualidades de los triángulos, ¿podría alguien contener la risa? Eso sería un juego de palabras, o más bien, emplearlas mal".

Para Gauss, ninguna magnitud era admisible, a menos que se demostrara su principio generador. Para magnitudes relacionadas con las raíces cuadradas de los números negativos, ese principio era la acción física compleja de la *rotación combinada con extensión.* Gauss llamó a las magnitudes generadas por esta acción compleja, "números complejos". Cada número complejo denotaba cierta cantidad de acción de rotación y de extensión combinadas.

La unidad de acción en el dominio complejo de Gauss es un círculo, que es una rotación con una extensión de uno (unidad de longitud). En este dominio, el número 1 significa una rotación completa; –1, media rotación; $\sqrt{-1}$, un cuarto de rotación; y $-\sqrt{-1}$, tres cuartos de rotación (ver **figura 5**).

Estas "sombras de las sombras", como él las llamó, sólo eran un reflejo visible de un tipo de acción todavía superior, independiente de todos los conceptos visibles del espacio. Estas formas superiores de acción, aunque invisibles, empero podían ponerse de manifiesto como una proyección sobre una superficie.

La perspectiva de Gauss es congruente con la que empleaban los colaboradores de la academia de Platón. En la antigua Grecia, la palabra para superficie, *epiphaneia* (raíz de la palabra "epifanía" en español), puede interpretarse como "aquello sobre lo cual algo se hace visible".

Desde esta óptica, Gauss demostró en su disertación de 1799, que el principio fundamental para generar cualquier ecuación algebraica, sin importar de qué poder, puede manifestarse, "epifanizarse", por así decirlo, como una superficie en el dominio complejo. Estas superficies eran representaciones visibles, no de lo que producían los poderes —como en los casos de las líneas, los cuadrados y los cubos—, sino del *principio* que producía esos poderes.

Para construir estas superficies, Gauss salió de la simple representación visible de los poderes —como los cuadrados y cubos— al buscar una forma más general de poderes, como la que se aprecia en la espiral equiangular (ver **figura 9**). Aquí,

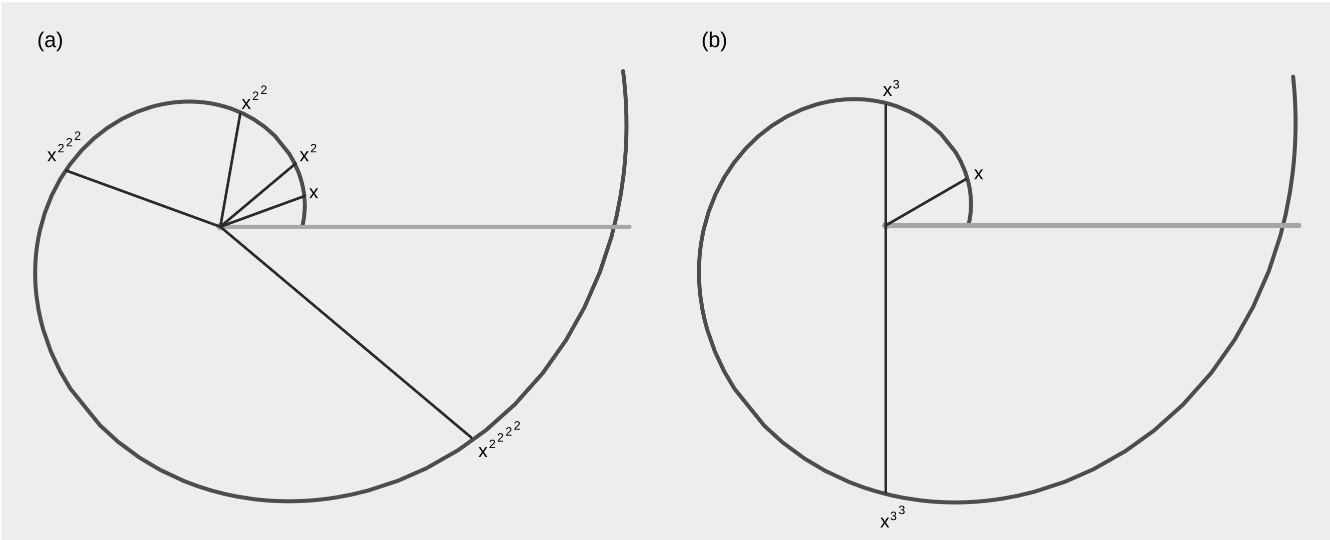


FIGURA 9. *En (a), las longitudes de los radios se cuadran en tanto el ángulo de rotación se dobla. En (b), las longitudes de los radios se cubican en tanto el ángulo de rotación se triplica.*

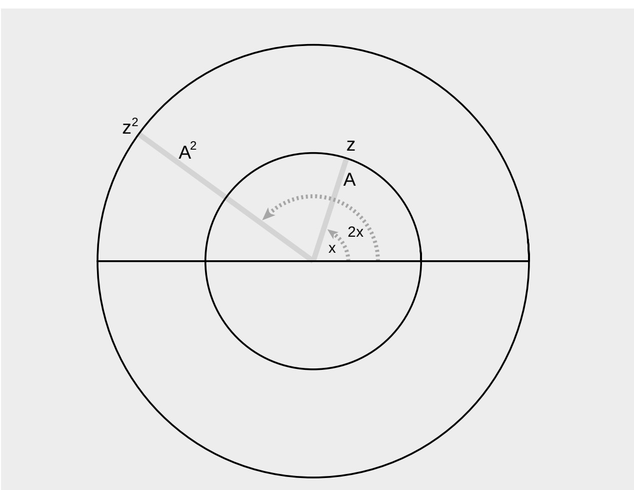


FIGURA10. *Cuadrando un número complejo.*

la generación de un poder corresponde a la extensión que produce un cambio angular. Por ejemplo, la generación de poderes cuadráticos corresponde a la extensión que resulta de doblar el ángulo de rotación, dentro de la espiral (ver **figura 9a**); y la generación de poderes cúbicos corresponde a la extensión que resulta de triplicar el ángulo de rotación, dentro de esa espiral (ver **figura 9b**). Así, es el *principio de cuadrar* el que produce magnitudes cuadradas, y el *principio de cubicar* el que produce las cúbicas.

En la **figura 10,** el número complejo z se "cuadra" cuando el ángulo de rotación se dobla de x a $2x$ y la longitud se cuadra de A a A^2. Al hacer esto, el círculo más pequeño se proyecta dos veces sobre el círculo "cuadrado", más grande, como mostramos en la primera parte. En la **figura 11,** se ilustra el mismo principio con respecto a cubicar. Aquí, el ángulo x se triplica a $3x$, y la longitud A se cubica a A^3. En este caso, el círculo más pequeño se proyectará tres veces sobre el círculo "cubicado", más grande. Y así para poderes superiores. En el cuarto poder, el círculo más pequeño se proyectará cuatro veces sobre el más grande; el quinto poder, cinco veces; y así sucesivamente.

Esto muestra un principio general que determina todos los poderes algebraicos. Desde esta perspectiva, la misma acción refleja a todos los poderes. Lo único que cambia con cada poder es el número de veces que ocurre la acción. Así, cada poder se distingue de los demás, no por una magnitud particular, sino por una característica topológica.

En su disertación doctoral, Gauss usó este principio para generar superficies que expresaran de una manera aún más fundamental la característica esencial de los poderes. Cada rotación y extensión producía un triángulo rectángulo característico. El cateto vertical de ese triángulo es el *seno*, y el horizontal el *coseno* (ver **figura 12**). Hay una relación cíclica entre el seno y el coseno que es una función del ángulo de rotación. Cuando el ángulo es 0, el seno es 0 y el coseno es 1. Cuando el ángulo es de 90°, el seno es 1 y el coseno es 0. Si uno sigue esta relación para una rotación completa, el seno va de 0, a 1, a 0, a –1, y de vuelta a 0; mientras que el coseno va de 1, a 0, a –1, a 0, y de vuelta a 1 (ver **figura 13**).

En la **figura 13,** en tanto z se mueve de 0 a 90°, el seno del ángulo varía de 0 a 1; pero al mismo tiempo, el ángulo para z^2 va de 0 a 180°, y el seno de z^2 varía de 0 a 1, y de vuelta a 0. Entonces, mientras z se mueve de 90 a 180°, el seno varía de 1 a 0 otra vez, pero el ángulo para z^2 ha pasado

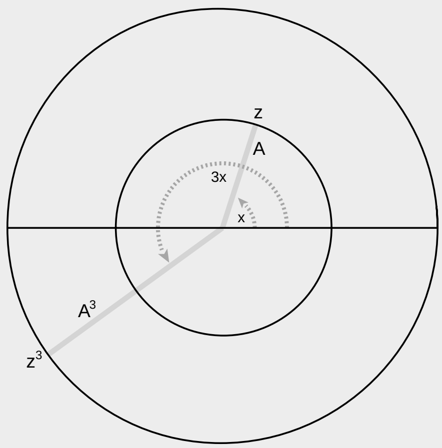


FIGURA 11. *Cubicando un número complejo.*

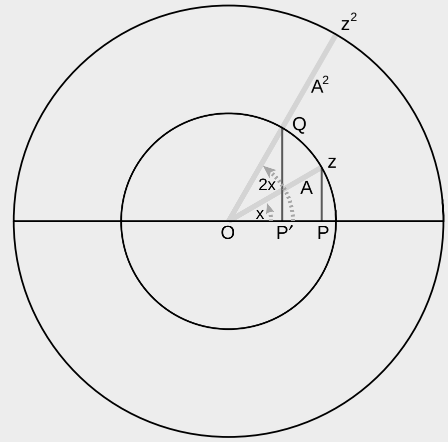
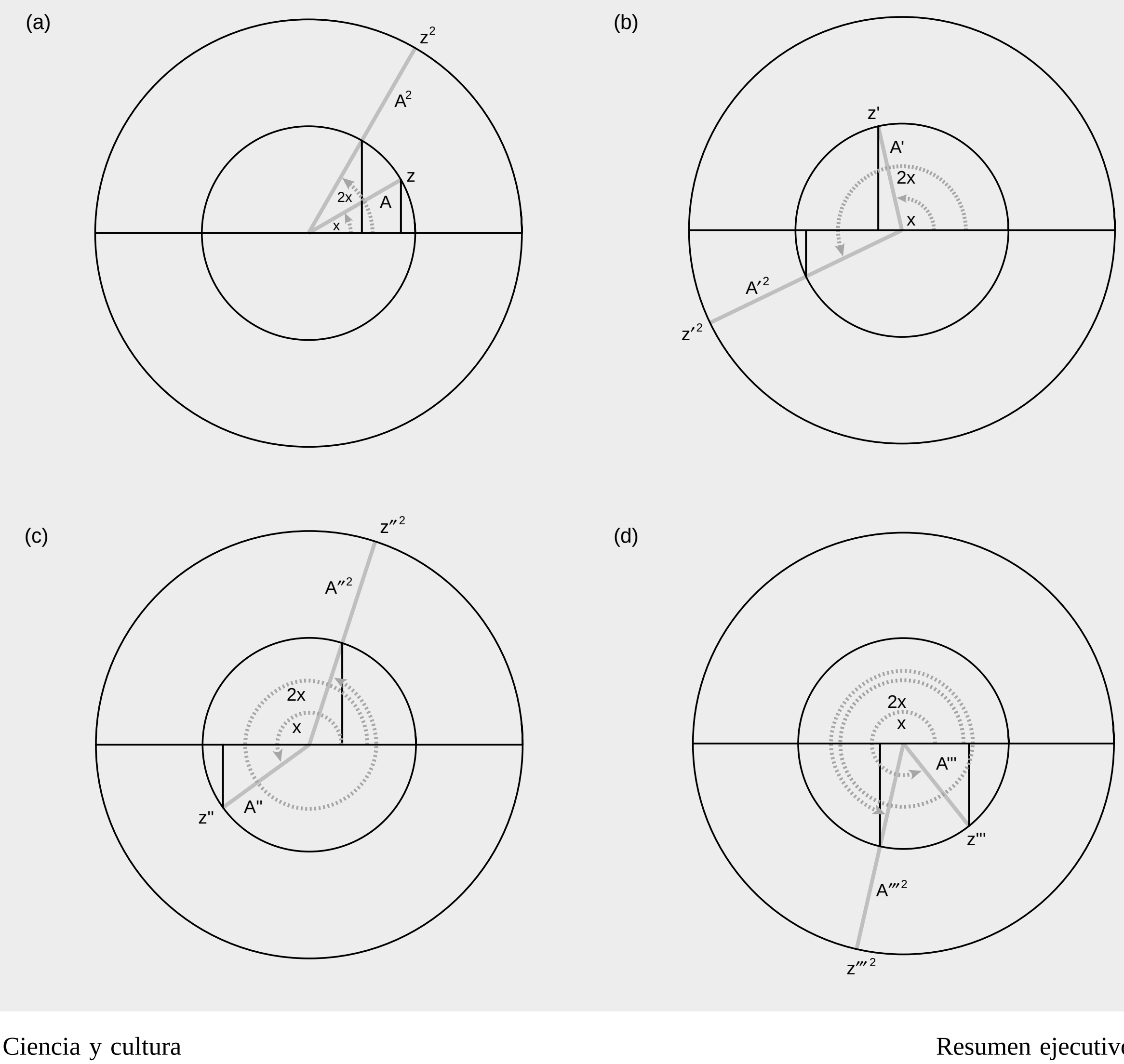


FIGURA 12. *El seno del ángulo x es la línea Pz, y el coseno de x es OP. El coseno de 2x es la línea P’Q, y el coseno es OP’.*

FIGURA 13. *Variaciones del seno y el coseno al cuadrar un número complejo, para cuatro cuadrantes, en tanto el ángulo x rota de 0 a 360°.*



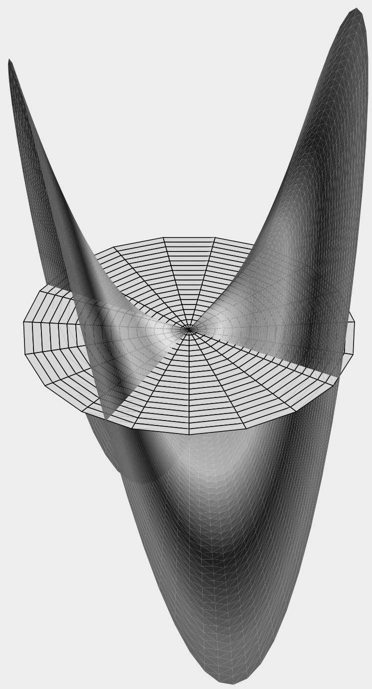


FIGURA 14. *Superficie gaussiana para el segundo poder.*

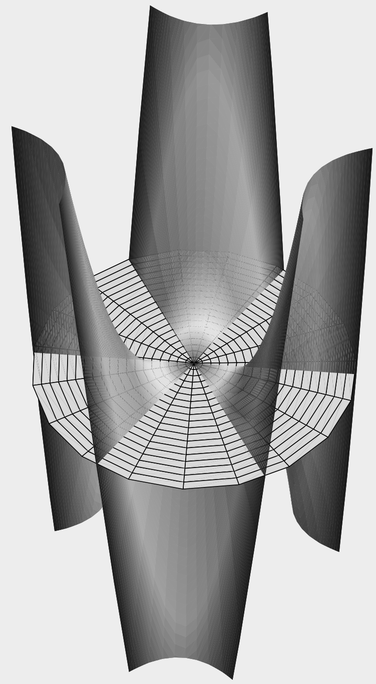


FIGURA 15. *Superficie gaussiana para el tercer poder.*

de 180 a 360°, y su seno ha variado de 0, a –1, a 0. Así, en media rotación de z, el seno de z^2 ha variado de 0, a 1, a 0, a –1, a 0.

En su disertación doctoral, Gauss representó este complejo de acciones como una superficie (ver **figuras 14, 15** y **16**). Cada punto sobre la superficie se determina de modo tal, que su altura sobre el plano es igual a la distancia desde el centro por el seno del ángulo de rotación, mientras ese ángulo aumenta por efecto del poder. En otras palabras, el *poder* de cualquier punto en el plano lo representa la altura de la superficie por sobre ese punto. Así, mientras los números sobre el plano se alejan del centro, la superficie crece más acorde al poder. Al mismo tiempo, al rotar los números en torno al centro, el seno pasará de positivo a negativo. Dado que los números sobre la superficie son los poderes de los números sobre el plano, el número de veces que el seno cambiará de positivo a negativo, dependerá de qué tanto multiplique el poder al ángulo (el doble para poderes cuadrados, el triple para los cúbicos, etc.). Por tanto, cada superficie tendrá tantas "jorobas" como la ecuación tenga dimensiones. Por consiguiente, una ecuación cuadrática tendrá dos "jorobas" para arriba y dos "jorobas" para abajo (ver **figura 14**). Una ecuación cúbica tendrá tres "jorobas" para arriba y tres para abajo (ver **figura 15**). Una ecuación de cuarto grado tendrá cuatro "jorobas" en cada dirección (ver **figura 16**); y así sucesivamente.

Gauss especificó la construcción de 2 superficies para

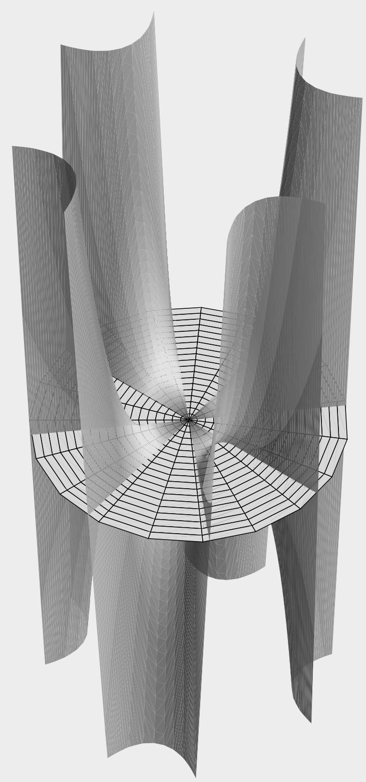


FIGURA 16. *Superficie gaussiana para el cuarto poder.*

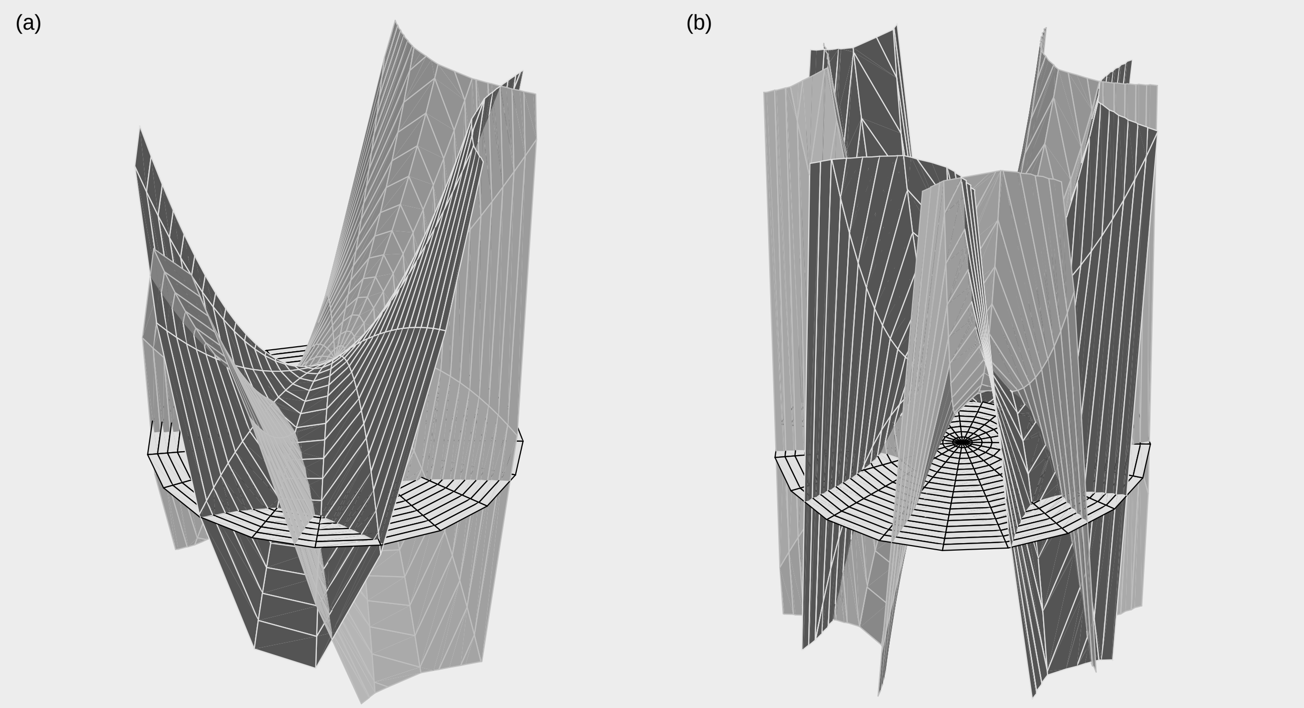


FIGURA 17. *(a) Combina las superficies basadas en las variaciones del seno y el coseno para el segundo poder. (b) Combina las superficies basadas en las variaciones del seno y el coseno para el tercer poder.*

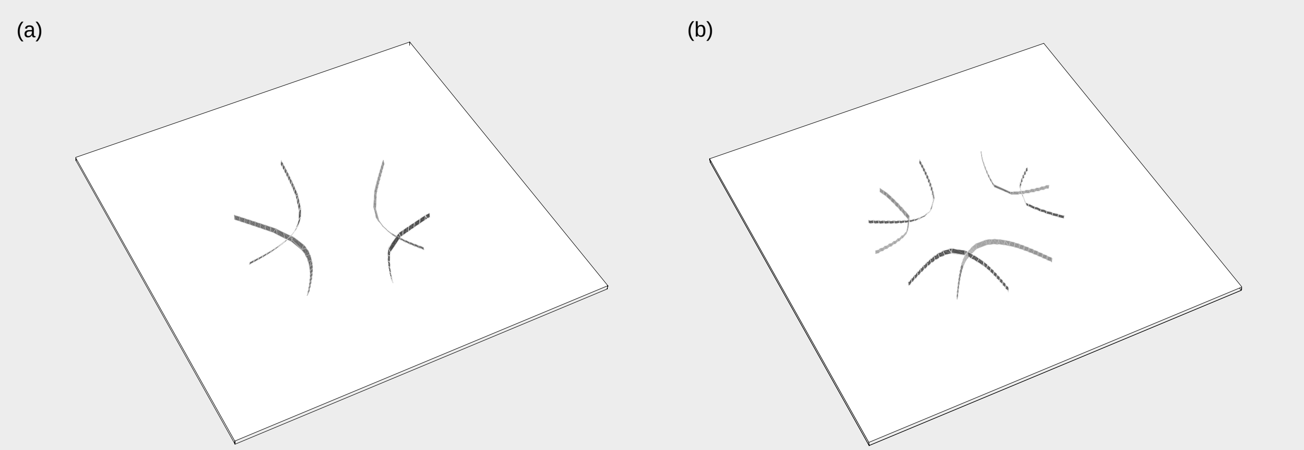


FIGURA 18. *Número de raíces de las ecuaciones algebraicas. (a) Intersección de las superficies para el segundo poder [gráfica 17(a)] con el plano. (b) Intersección de las superficies para el tercer poder [gráfica 17(b)] con el plano.*

cada ecuación algebraica, una basada en las variaciones del seno y la otra en las del coseno (ver **figura 17**). Cada una de estas superficies determinará curvas definidas en donde intersecan con el plano (ver **figura 18**). El número de curvas dependerá del número de "jorobas", que a su vez depende del poder más alto.

Dado que las superficies del seno y el coseno se rotan 90° en relación el uno del otro, las curvas sobre el plano intersecarán unas a otras, y el número de intersecciones corresponderá al número de poderes. Si se considera al plano como cero, estas intersecciones corresponderán a las soluciones, o "raíces" de la ecuación. Esto comprueba que una ecuación algebraica tiene tantas raíces como su poder más alto (ver **figura 18**).

El principio de los poderes

Retrocede un poco y observa este trabajo. Estas superficies se generaron, no de cuadrados o cubos visibles, sino del principio general de cuadrar, cubicar y de los poderes superiores. Representan, metafóricamente, un principio que se manifiesta de forma física, pero que no puede verse. Al proyectar este principio —la forma general de los *poderes* de Platón— sobre estas superficies complejas, Gauss ha hecho visible lo invisible, e inteligible aquello incomprensible en el mundo superficial del formalismo algebraico.

El esfuerzo por hacer inteligibles las implicaciones del dominio complejo fue un asunto clave para Gauss a lo largo de su vida. En una carta dirigida a su amigo Hansen el 11 de diciembre de 1825, Gauss dijo:

"Estas investigaciones llevan profundamente a muchas otras, incluso diría, a la Metafísica de la teoría del espacio; y es sólo con gran dificultad que puedo desprenderme de los resultados que brotan de ellas, como, por ejemplo, la verdadera metafísica de los número negativos y los complejos. El verdadero sentido de la raíz cuadrada de −1 está siempre vivo en mi mente, pero es muy difícil expresarlo con palabras, y sólo logro ofrecer una imagen vaga que flota en el aire".

Fue de aquí de donde partió Bernhard Riemann.

—*Traducción de Carlos Cota Moreno y Juan José Mena.*

Epílogo

Diálogo sobre los fundamentos de una política educativa sólida

Respuesta de Lyndon H. LaRouche a una pregunta sobre la reforma educativa, que recibiera a través de la página electrónica de su campaña presidencial.

A veces, quizás aun con frecuencia, la mejor forma de acometer un asunto aparentemente nebuloso, como el adiestramiento animal que reciben hoy día los alumnos para simular que aprueban exámenes normalizados, sea flanquear la materia aparente para llegar a las cuestiones subyacentes, más profundas, de las que esa materia es tan sólo sintomáticA. Respondo en conformidad.

Cada vez hay más personas, sobre todo estudiantes universitarios, que participan de manera activa en nuestro trabajo y que representan necesidades e inquietudes educativas especiales. Estas inquietudes incluyen el insulto de que se les someta a una educación virtualmente de paquetes de información, pero sin nada de conocimiento, y muy cara. Más importante, se les niega el acceso al tipo de conocimiento al que deberían tener acceso por derecho. En diversas ocasiones en que me han abordado en concentraciones de uno a varias veintenas de individuos, muchas de las cuestiones que se tocan representan un desafío para mí: "¿Qué harás para darnos una verdadera educación?" Esa exigencia no tiene nada de injusta; así la recibo. Sin embargo, darle una respuesta en un plazo relativamente corto presenta un reto.

Yo he ofrecido algunas respuestas amplias a ese tipo de preguntas, pero permíteme responder a tu pregunta centrándome en lo que he decidido que es lo más descollante del paquete que he presentado.

En el mismo período en que terminaba su *Disquisitiones Arithmeticae*, el joven Carl Gauss hizo la primera de sus varias presentaciones de su descubrimiento del teorema fundamental del álgebra. En la primera de estas, describió en detalle cómo su descubrimiento de la definición y el significado más profundo del dominio complejo ofrecía una amplia refutación a la doctrina contraria a Leibniz, que habían difundido Euler y Lagrange, de los "números imaginarios". Gauss, trabajando desde la perspectiva del más creativo de sus maestros en Gotinga, Abraham Kästner, acometió con éxito el problema de demostrar la insensatez del trabajo de Euler y Lagrange, y nos dio la noción moderna del dominio complejo, así como también estableció la base para integrar las contribuciones de Gauss y Dirichlet bajo el cobijo del desarrollo original de Riemann de una verdadera geometría antieuclidiana (a diferencia de meramente no euclidiana).

En escritos posteriores sobre el teorema fundamental, Gauss se cuidó más de atacar la escuela reduccionista de Euler, Lagrange y Cauchy, hasta casi el final de su vida, cuando decidió referirse a sus descubrimientos de juventud de una geometría antieuclidiana. Por tanto, es indispensable leer sus últimos escritos sobre el teorema fundamental a la luz del primero. Desde esa perspectiva, la consistencia de su razonamiento subyacente es clara en todos los casos, y también se aclara la conexión que cita Riemann en su propia disertación de habilitación.

La cuestión central del método

Ahora, sobre los antecedentes. A lo largo de las últimas décadas de discutir, enseñar y escribir sobre la cuestión del método científico, he luchado por diseñar la pedagogía óptima para ofrecer a los estudiantes y a otros un conjunto más conciso de ejercicios cognoscitivos por medio de los cuales puedan llegar a dominar más rápido la cuestión central del método. He incluido la obra de Platón y de sus seguidores en su Academia, la de Eratóstenes y de pensadores modernos como Brunelleschi, Cusa, Pacioli, Leonardo, Kepler, Fermat, Huyghens, Bernoulli y Leibniz, entre otros de esa misma corriente antirreduccionista en la ciencia. Puedo ver todo eso en retrospectiva como una pedagogía sólida, pero no todavía como la adecuada para las necesidades de la amplia gama de intereses especializados de los jóvenes a los que me he referido. Yo necesitaba algo aún más conciso, que estableciera de la forma más eficiente el punto de partida decisivo del trabajo en cuestión, tentativa que debe satisfacer las necesidades de tan amplia gama de estudiantes y otros. Mi reciente decisión, que tomé en concierto con un equipo de colaboradores sobre este asunto específico, fue centrar la perspectiva de una política general de educación preparatoria y universitaria en la ciencia física, en el caso de la primera presentación de Gauss de su teorema fundamental.

Abraham Kästner, de Gotinga, y arraigado en Leipzig, fue un genio universal, el principal defensor de la obra de Leibniz y Juan Sebastián Bach, y una figura clave en ese desarrollo general del período clásico alemán representado por el propio Lessing de Kästner, el colaborador de Lessing contra Euler y demás, Moisés Mendelssohn, y seguidores suyos como Goethe, Schiller, y de Wolfgang Mozart, Beethoven, Schubert, los hermanos Humboldt y Gerhard Scharnhorst. Por su genio, los círculos reduccionistas de Euler, Lagrange, Laplace, Cauchy, Poisson, etc. difamaron a Kästner a tal grado, que calumnias francamente fraudulentas se convirtieron en artículo de fe entre los reduccionistas, incluso en su época, y hasta entre los académicos modernos, que perpetúan esos fraudes como verdades eternas a la fecha. Entre las contribuciones fundamentales de Kästner a toda la ciencia física subsiguiente, estuvo que originó en seguidores suyos, tales como su joven alumno Carl Gauss, la noción de un concepto explícitamente antieuclidiano de matemáticas. La primera publicación del propio descubrimiento de Gauss del teorema fundamental del álgebra aclara todas estas conexiones y su continua importancia fundamental para la ciencia hasta el presente.

La tradición platónica vs. la reduccionista

Este cambio en mi táctica tiene las siguientes características cruciales.

La cuestión decisiva de la ciencia y la educación científica en la civilización europea, desde los tiempos de Pitágoras y Platón hasta la fecha, ha sido la división entre las tradiciones platónica y reduccionista. La primera la representan, para la ciencia moderna, la definición original de Cusa de principios experimentales modernos, y seguidores de Cusa tales como Pacioli, Leonardo, Gilbert, Kepler, Fermat, etc. A los reduccionistas los representan los aristotélicos (como Tolomeo, Copérnico y Brahe), los empiristas (Sarpi, Galileo y demás, hasta Euler, Lagrange y después), la "escuela crítica" de empiristas neoaristotélicos (Kant, Hegel), los positivistas y los existencialistas. Esta división se expresa también como el conflicto entre el reduccionismo en la forma del esfuerzo por derivar la física de las matemáticas de "torre de marfil", en oposición a los métodos de —por ejemplo— Kepler, Leibniz, Gauss y Riemann, para derivar las matemáticas, como herramienta de la ciencia física, de la física experimental.

El desafío pedagógico que me presentan las exigencias de los estudiantes, para mí y mis colaboradores en esto, tales como el doctor Jonathan Tennenbaum y el señor Bruce Director, ha sido el de expresar estas cuestiones de la forma más concisa y experimentalmente fundamentada. Poner todos los puntos principales del trabajo de Gauss en la dirección necesaria. La piedra angular de todas las grandes contribuciones de

Gauss a la ciencia física y las matemáticas la expresan las cuestiones científico–históricas imbuídas en la primera presentación del descubrimiento del teorema fundamental del álgebra de Gauss.

Todo método reduccionista en la práctica matemática consistente, depende del supuesto de la existencia de ciertos tipos de definiciones, axiomas y postulados que se enseñan como "autoevidentes", una premisa fundada más que nada en el supuesto de que se derivan de la naturaleza esencial de la fe ciega en la certeza sensorial por sí misma. Hasta donde sabemos en la historia de esta cuestión como hoy la conocemos, la única forma coherente contraria de método es aquella asociada al término "el método de hipótesis", como mejor lo representa de modo más general la colección de los diálogos socráticos de Platón. Los casos del *Menón*, el *Teetetes* y el *Timeo*, tipifican de la forma más elegante aquellas cuestiones de método en su pertenencia inmediata a los asuntos de la relación entre las matemáticas y la ciencia física. El establecimiento de los principios de un método científico experimental basado en ese método de hipótesis lo introdujo Nicolás de Cusa, en una serie de escritos, empezando con su *De docta ignorantia*. La corriente platónica moderna en la ciencia física y las matemáticas se deriva axiomáticamente de la lectura del método platónico que introdujo Cusa. El trabajo de Kepler es el primer intento exitoso de una física matemática comprensiva basada en estos principios de un método de ciencia física.

Desde el principio, como desde los diálogos de Platón, el método científico se ha fundado en la demostración de que la interpretación formalista de la realidad se derrumba fatalmente cuando el uso de esa interpretación se enfrenta a ciertas paradojas ontológicas bien definidas de manera empírica, como lo ejemplifica el caso del descubrimiento original de la gravitación universal de Kepler, que aparece en su *Nueva astronomía*, de 1609. La única solución verdadera a tales paradojas ocurre en la forma de la generación de una hipótesis, una hipótesis de la calidad que le da un vuelco a algunas de las definiciones, axiomas y postulados existentes, y también introduce nuevos principios universales hipotéticos. La validación de tales hipótesis, por medio de métodos experimentales apropiadamente exhaustivos, las establece como lo que ha de reconocerse como un principio físico universal, o su equivalente (como en el caso del descubrimiento y desarrollo de J.S. Bach de los principios del contrapunto bien temperado en la composición).

La geometría del dominio complejo

La refutación demoledora de Gauss del concepto erróneo de Euler y Lagrange de los "números imaginarios", y la introducción de la noción de la eficacia física de la geometría del dominio complejo, representan el fundamento de todo concepto defendible en la física matemática moderna. He allí el meollo de mi propuesta del uso general de este caso de la refutación que hace Gauss de Euler y Lagrange, como la piedra angular de un nuevo plan de estudios para los estudiantes medios y universitarios.

Lyndon LaRouche habla con un grupo de jóvenes larouchistas durante una escuela de cuadros.

En resumen, Gauss demostró, no sólo que la aritmética no se deriva axiomáticamente de modo competente de la noción de los mentados números cardinales, sino que la prueba de la existencia del dominio complejo dentro del dominio de los números demostró dos cosas de importancia decisiva para todo método científico de allí en adelante. Estas variables complejas no son meramente potencias, en el sentido en que las funciones cuadráticas y cúbicas definen poderes, a diferencia de la simple linealidad. Representan un remplazo de las nociones lineales de dimensionalidad, por una noción general de magnitudes extendidas del espacio–tiempo físico, como Riemann generalizó esto en su disertación de habilitación a partir, en lo principal, de la óptica de Gauss y Dirichlet.

El carácter elemental de ese teorema de Gauss, así situado, destruye de una forma elemental los axiomas de torre de marfil de Euler y demás, a partir de la aritmética misma. También brinda un criterio de referencia para el uso del término "verdad", como distinto de la mera opinión, dentro de la ciencia física y las matemáticas, y también en el dominio de las relaciones sociales. Esas metas se logran sólo a condición de que el estudiante pase por la propia experiencia cognoscitiva de Gauss, tanto realizando el descubrimiento, como refutando genéricamente el reduccionismo. Es este sentido interno, cognoscitivo, de "yo sé", en vez del "se me ha enseñado a creer", lo que debe convertirse en el principio bien entendido de una política revigorizada de educación humanista clásica universal.

Una vez que un estudiante aplicado obtiene el sentido cognoscitivo interno de "yo sé esto", él o ella ha alcanzado un hito contra el cual comparar muchas otras cosas.

—Lyndon H. LaRouche.
12 de abril de 2002

El FMI ordena el cierre de la Orquesta Sinfónica de Colombia

por Javier Almario

Para cumplir con los recortes presupuestales ordenados por el Fondo Monetario Internacional (FMI), y en un afán no muy disimulado de suprimir la música clásica en Colombia, el gobierno del presidente de es país, Álvaro Uribe Vélez, está a punto de cerrar la Orquesta Sinfónica de Colombia y la Banda Nacional.

En respuesta, la Banda Nacional y la Orquesta Sinfónica decidieron lanzarse a una curiosa protesta en las primeras semanas de diciembre. Con conciertos ante los órganos de difusión y en las plazas públicas, salieron a defender las instituciones para las que trabajan. Una de las piezas que más usaron en esta inusual protesta, fue la *Pequeña serenata* de Mozart.

El primer anuncio en ese sentido, lo hizo Rudolf Hommes, ex ministro de Hacienda de la época del entonces presidente de Colombia, César Gaviria (1990–1994), y responsable de haber aplicado la apertura a las importaciones y la globalización económica que dejó en ruinas la economía y los ingresos del estado colombiano.

En un artículo del diario *Portafolio* el 26 de noviembre, Hommes afirmó que hay "que tomar resignadamente la decisión de dejar desaparecer" la Orquesta Sinfónica, porque ésta "absorbe el 20% del magro presupuesto del funcionamiento del Ministerio de Cultura".

A Hommes se le conoce como el Rasputín del presidente Álvaro Uribe, y fue el individuo que propuesieron los banqueros de Wall Street para ministro de Hacienda de su gobierno. Sin embargo, sus muy visibles lazos con Wall Street, en particular con la empresa Violy Biorum and Partners, empresa que patrocinó las calumnias contra el presidente Uribe, frustraron sus aspiraciones de ser ministro en este gobierno. Sin embargo, se ha convertido en columnista y personaje de la farándula, cuyas entrevistas y comentarios, que van desde el presunto derecho de los homosexuales a casarse, pasando por amenazas contra funcionarios, hasta sus ideas simplonas en materia de economía, que no difieren de las del tendero de la esquina —de comprar barato y vender caro—, aparecen en todos los óragnos de difusión.

Cada vez que el gobierno de Uribe amenaza con hacer algo por fuera de los dictados del FMI, Hommes surge como una especie de mazo de demolición para impedir el más leve desliz. Uribe intentó defender la agricultura con araceles, y Hommes movió sus contactos en Wall Street para hundir tal iniciativa. Uribe anunció que su gobierno promovería que los niños tocaran instrumentos musicales clásicos, y ahora Hommes sale con la idea de aplastar este género musical. En su artículo, tuvo el descaro de promover que la Orquesta Sinfónica se financiara organizando "orquestas de mariachis para darles serenatas a las novias de los *yuppies* bogotanos".

La ministra de Cultura, Adriana Mejía, que ya anunció el cierre de la Orquesta Sinfónica y la Banda Nacional, y su sustitución por una Asociación Sinfónica (que agruparía a las bandas de "rascatripas" que quedarían para animar bodas y fiestas), afirmó que son una "carga onerosa que anualmente le vale al Estado 3.100 millones de pesos (un millón doscientos mil dólares)", repitiendo los argumentos de Hommes. Lo que no dicen ni Hommes ni la Ministra, es que el gobierno gasta 3 billones de pesos (mil doscientos millones de dólares) anuales en bonos del Fondo de Garantía de las Instituciones Financieras para salvar los bancos nacionales (que en realidad son sucursales de la banca internacional) de una inminente bancarrota, y más del 50% del presupuesto se dedica al servicio de la deuda interna y externa. Si el gobierno no pagara intereses de la deuda, ese subsidio que los estados le otorgan a la banca privada internacional y nacional, tendríamos un déficit cero.

El debate que inició Hommes coincidió con la visita a Colombia de Horst Köhler, director gerente del FMI, quien exigió que el gobierno aplicara todas las reformas diseñadas por el Fondo, entre ellas un recorte a las pensiones y a los gastos de salud y educación. El FMI pretende que el déficit se reduzca de casi 5% del PIB, a sólo 2%, sin recortar, por supuesto, el pago de la deuda.

Si el pueblo colombiano no defiende la Orquesta Sinfónica, el siguiente embate será contra las facultades de música de las universidades estatales, las cuales han sido calificadas por los "expertos" del Ministerio de Hacienda como las más ineficientes en cuanto a su "costo–beneficio", porque dictan clases individuales a los alumnos de instrumentos en comparación con la presunta eficiencia de las clases de derecho, donde un sólo catedrático dicta clase a 100 estudiantes.

No sería la primera vez que Hommes desparece una orquesta. Cuando fue ministro de Hacienda (1990-1994), obligó a los departamentos de Colombia a efectuar severos planes de ajuste, y en ese proceso desaparecieron la Orquesta Sinfónica del Valle, la Orquesta Sinfónica de Antioquia, la Orques-

La Orquesta Sinfónica de Colombia en plena ejecución.

ta Filarmónica de Medellín y la Sinfónica del Caribe. Dichas orquestas quedaron reducidas a grupos inestables que, en una lamentable condición de mera supervivencia, sólo se reúnen para una que otra presentación pagada.

A la ideología neoliberal de Hommes hay que sumarle una especie de ideología "neomaoísta", que permea los argumentos tanto de Hommes como de los que han manjeado el Ministerio de Cultura en los últimos años. Mao Tse Tung, durante la presunta "Revolución Cultural", decidió eliminar la música clásica de China con el argumento de que era una perversa música occidental burguesa y que la única música válida era la música folklórica china. Mao ordenó la destrucción y quema de todos los pianos, violines, violoncelo y demás instrumentos sinfónicos, así como los discos y libros de partituras de música clásica, en aras de conservar el atraso. Los músicos y muchos otros profesionales fueron obligados a realizar trabajos forzados, dizque para reeducarlos en la conciencia de la clase campesina. Tres generaciones de chinos sufrieron esta brutal represión cultural.

Por este mismo camino, el gobierno de Virgilio Barco eliminó el coro de Colcultura en 1986, porque según Barco, la población colombiana no tenía derecho a escuchar un coro de ópera, pues esa no era "nuestra cultura". A fines del 2001, dizque por razones presupuestales, en Bogotá, la capital colombiana, se eliminó al Coro Santa Fe de Bogotá, el único coro profesional que existía en Colombia.

La finada ex ministra de Cultura, Consuelo Araujo Noguera, afirmó en el 2000, durante el gobierno de Andrés Pastrana, que era absurdo que el presupuesto para la cultura se gastara en patrocinar música "extranjera" como la ópera y que las universidades del estado se dedicaran a enseñar música clásica, y que el esfuerzo debía centrarse en la promoción de los lamentos de los vallenatos.

La actual ministra, Adriana Mejía, afirmó que el género sinfónico "no tiene representatividad nacional", y dejó implícito que era preferible gastar ese dinero en bandas "papayeras" en los diferentes departamentos, dedicadas exclusivamente a la música bailable.

Hommes también mostró el mismo neo–maoísmo cuando, al salir del Ministerio de Hacienda para ser nombrado rector de la Universidad de los Andes, que pretende ser la sucursal de la Universidad de Harvard en Colombia, además de echar a los profesores de la Facultad de Economía que se oponían a la globalización, también la emprendió contra la Facultad de Música. No logró acabar con la Facultad, pero sí eliminó el programa de música para los niños.

Tal vez lo que Hommes pretende es eliminar el optimismo de la población colombiana, en especial el que se desprende de la cultura clásica, y que la población embrutecida no sienta ninguna esperanza mientras se aplican las políticas del FMI, que tienen quebradas las economías de casi todas las naciones del planeta.

Entrevista

Con todo respeto, señor Hommes, usted no sabe lo que dice

Entrevista que la violinista Liz Ángela García, concertina encargada de la Orquesta Sinfónica de Colombia, concedió el 8 de diciembre de 2002 a Javier Almario y Maximiliano Londoño de la revista EIR.

EIR: Maestra Liz, antes de ser concertina de la Orquesta usted estudiaba en Alemania. ¿Cuántas orquestas hay en Ale-

Violinista Liz Ángela García.

mania financiadas por el Estado, sean nacionales, estatales o municipales?
Maestra García: En Alemania hay 300 orquestas estatales. Hay por lo menos una orquesta en cada ciudad. En Munich, donde yo estudié, hay 5 orquestas, y de esas 5, hay dos que son inmensas, la Orquesta Sinfónica de Munich y la Orquesta Universitaria, orquestas realmente completísimas.

En Berlín había 7 orquestas, claro que con la reunificación de Alemania Oriental y Alemania Federal algunas se fusionaron, pero de todas formas quedaron 5 orquestas en Berlín. Como le decía, hay por lo menos una orquesta en cada ciudad y todas son financiadas por el estado.

EIR: ¿Existen orquestas privadas en Alemania?
Maestra García: En Alemania las orquestas son estatales, aunque no sé si en los últimos 2 años hayan creado alguna privada. No creo.

EIR: Yo sé que esto es desproporcionado, pero, ¿qué tal si compara Alemania con Colombia en ese aspecto?
Maestra García: En Colombia sólo hay dos orquestas, la Filarmónica de Bogotá y la Sinfónica de Colombia, que han subsistido con enormes dificultades. Sólo existen esas dos en realidad.

EIR: Y, si sólo hay dos, ¿por qué quieren acabarlas?
Maestra García: Es una política que ha adoptado el estado, siguiendo el absurdo modelo de la privatización y la globalización.

¿Y dónde está el presupuesto?

EIR: El primero que habló públicamente de eliminar la Orquesta Sinfónica fue Rudolf Hommes, ex ministro de Hacienda y asesor del presidente de Colombia, Álvaro Uribe Vélez, pero, ¿cuál es la información oficial que ustedes tienen?
Maestra García: Oficialmente, ninguna información. Simplemente que después del artículo de Hommes, algunos de los músicos de la Orquesta buscaron la información presupuestal en Planeación Nacional, y descubrieron que nuestro presupuesto había desaparecido y se había asignado a otras actividades.

Entonces, esta información, más otra que hemos recibido en el sentido de que hay un plan para desaparecer la Orquesta, nos llevó a adelantar esta campaña en defensa de la Orquesta y la cultura en Colombia.

EIR: Parafraseando al ex presidente de Colombia, Ernesto Samper, en el momento álgido del escándalo del narcofinanciamiento de su campaña, ¿está haciéndose eso a “espaldas” del presidente Uribe, o él personalmente tomó esa decisión?
Maestra García: Me temo que el Presidente aprobó personalmente esa decisión.

EIR: ¿No es eso contradictorio, si se tiene en cuenta que el Presidente dijo que iba a promover que los niños tocaran instrumentos musicales, porque un niño que empuña un instrumento es un niño que jamás empuñará un arma para ningún grupo terrorista?
Maestra García: Completamente contradictorio. Es un problema de definir hacia dónde va el país. Es absurdo fomentar que los niños aprendan música y toquen instrumentos, y que al mismo tiempo se cierren las orquestas. La mayor aspiración de un estudiante de música es pertencer a la Orquesta Sinfónica o a la Filarmónica. Me parece muy bien que los conservatorios, las escuelas de música y las academias generen interés por la música, pero también tiene que producirse música a nivel profesional.

Nosotros somos 75 músicos, la gran mayoría muy jóvenes, que con un buen apoyo y propaganda podríamos llegar a mucha más gente y participar más en la educación musical de esos niños y jóvenes que están preparándose.

EIR: Un argumento recurrente entre los que, a nombre del Fondo Monetario Internacional, quieren eliminar el presupuesto para la música clásica, es que esta dizque es música “extranjera” que no forma parte de nuestra cultura autóctona. Con ese argumento, el entonces presidente colombiano Virgilio Barco eliminó el Coro de Colcultura y la Ópera de Colombia, y eliminó el financiamiento estatal para la ópera. Ese mismo argumento lo utilizó la hoy finada ex ministra Consuelo Araujo Noguera, quien alegaba que casi todo el presupesto de la cultura se usaba para promover la música "extranjera", como la ópera y las orquestas de música clásica, y que, en cambio, fomentar el vallenato era más barato y era música "propia".

Maestra García: Yo pienso que toda la música tiene su expresión en un espacio propio de la misma. Y no hablemos sólo del vallenato, hablemos de nuestra música folklórica: bambucos, pasillos, música llanera y la música indígena. Pero, además de esta música, que de pronto consideramos muy propia, es necesario que todo el mundo tenga su encuentro con la universalidad, con los compositores y la música de otros países, especialmente la música que ha trascendido a una universalidad. Algunos piensan que lo único auténticamente nuestro sería la música indígena. Pero resulta que también tenemos el influjo de la población que vino de África, la que llegó de España y la influencia de los demás países europeos. Nuestra cultura es, definitivamente, europea.

La música, en última instancia, es univeral.

Con todo respecto, señor Hommes. . .

EIR: Y la música "indígena" que se preserva hasta nuestros días se compuso después de que los sacerdotes españoles les explicaron a los indígenas las escalas diatónicas y la escritura y lectura de la música.

Por otra parte, el acordeón, tan imprescindible en el vallenato, fue traído al Caribe por los piratas ingleses y franceses. En Colombia se fabrican violines, pero no acordeones, que todos son importados.

Maestra García: ¡Y qué decir del idioma! Hablamos y nos comunicamos en español, y no en los dialectos indígenas. Nuestras raíces culturales son europeas, con nuestras características propias colombianas. La Orquesta Sinfónica es una expresión colombiana de la cultura universal, que tomó mucho tiempo y esfuerzo para concretarse y mantenerse en la forma en que la tenemos. Es un esfuerzo que requiere músicos con muy buenas bases y muy buena disciplina, que se seleccionan de una manera muy rigurosa y cuidadosa. La mayoría de los músicos de la Orquesta somos colombianos, hemos interpretado muy buenos arreglos orquestales clásicos de música colombiana, tocamos para el pueblo colombiano e interpretamos música universal para un público colombiano.

Aquí no podemos decir que el vallenato se debe fomentar porque mucha gente lo escucha, y que, en cambio, relativamente poca gente nos escucha a nosotros. No podemos fijarnos únicamente en la cantidad. También la calidad cuenta. Eso es lo que representa la Orquesta; con nuestra calidad estamos dándoles un gran ejemplo a las futuras generaciones.

La música que hoy en día es popular es más un fenómeno de los medios de comunicación que de formación musical. Nosotros si somos formación. Con todo el respeto para el señor Hommes, él no sabe lo que dice. La música, la cultura y la educación de un pueblo son muy importantes para cualquier nación y para su economía. Hay una gran cantidad de valores que no pueden contarse en números o en dinero. Al país no pueden cerrársele los campos de la educación y la expresión artística.

EIR: ¿Qué cree que le falte a la Orquesta Sinfónica para que funcione mejor?

Maestra García: Hay muchas cosas que se tienen que hacer, especialmente en el área de la divulgación. Por el presupuesto tan reducido, no hay divulgación para que el público sepa lo que hace la Orquesta. Muy de vez en cuando se publican afiches para anunciar los conciertos y no hay absolutamente nada de propaganda en la radio ni en la televisión.

Otro gran problema es que la Orquesta no tiene sede y la gente no sabe donde encontrarnos. A veces ensayamos en un sitio, a veces en otro; somos músicos errantes. El resultado es que no tenemos el público que debiéramos tener. La gente que va a los conciertos lo hace porque escucha el rumor de que la Orquesta tocará en alguna parte.

EIR: Luis Biava, quien fue director de la Orquesta Sinfónica de Colombia, ahora es director de la Orquesta de Filadelfia, y escribió una carta en defensa de la Orquesta Sinfónica. Si se cierra la Orquesta, ¿cree que eso fomentará la fuga de cerebros?

Maestra García: Ya hay una fuga de cerebros muy grande. Yo creo que parte de los músicos trataría de conseguir empleo en el exterior y se le estaría mandando un mensaje a los jóvenes que están preparándose, en el sentido de que en Colombia no tendrán futuro en su profesión. Pero yo soy optimista, porque el público nos está respaldando, y ese público incluye a intelectuales influyentes. Estamos recibiendo infinidad de cartas de apoyo. Además, pasamos por el mejor momento musical de la Orquesta, dado que el maestro Irving Hoffman ha hecho un trabajo excelente.

EIR: Usted perteneció a la Orquesta Filarmónica de Bogotá. ¿Cree que en la Filarmónica la situación esté mejor?

Maestra García: No me parece. De hecho, cuando a mí me nombraron concertina asistente de la Sinfónica, la plaza que yo dejé en los primeros violines no se cubrió y no se ha llenado.

EIR: ¿Qué siente usted al tener que salir de su papel de concertina encargada, al de vocera política de la Orquesta?

Maestra García: Un poco extraña. Bueno, yo no soy vocera política de la Orquesta, pero he tenido que defenderla públicamente con argumentos, aunque para mí lo mejor sería aportarle al país con mi violín. A todos nos ha tocado salir de ese papel un poco aislado que tenemos los músicos, para hablar con congresistas, periodistas, improvisar discursos. Todos nos hemos convertido en voceros de la Orquesta. Fruto de esta crisis, hemos pasado por un proceso muy acelerado de concientización que me parece bueno, y estoy optimista de que esta batalla la vamos a ganar.